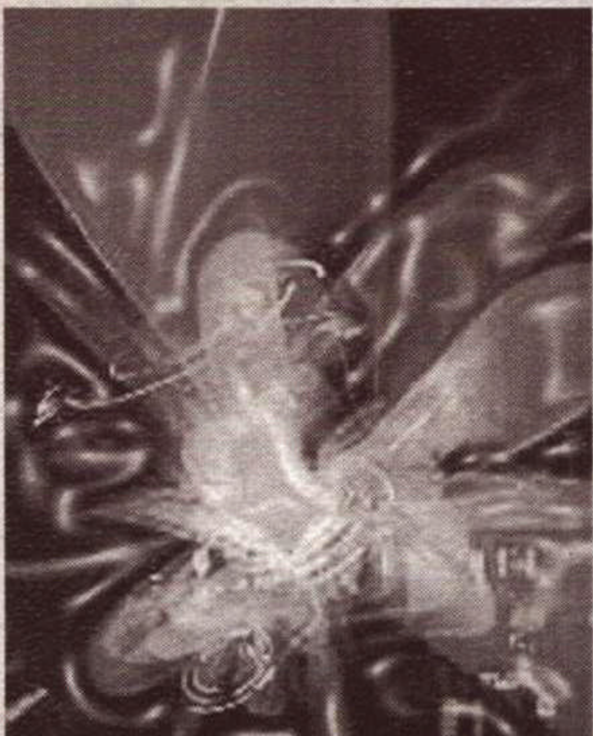
# Ю. А. Петров

# ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ АБСТРАКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ И ОСУЩЕСТВИМОСТИ



УРСС

Ю. А. Петров

# ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ АБСТРАКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ И ОСУЩЕСТВИМОСТИ

Ответственный редактор:
доктор физико-математических наук,
профессор *С. А. Яновская*

Издание второе, исправленное

МОСКВА

УРСС

ББК 22.12 22.18 87.4

**Петров Юрий Александрович**

***Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости*** / Отв. ред. $\boxed{\text{С. А. Яновская}}$. Предисл. Б. В. Бирюкова. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 200 с.

ISBN 5-354-00975-8

В связи с развитием кибернетики, конструктивного направления в логике и математике, теории конечных автоматов, математической логики и теории моделирования значительно возросло значение правильного понимания проблем абстракций бесконечности и осуществимости.

В данной книге рассматриваются формально-логические и философские проблемы, связанные как с известными уже, так и с новыми абстракциями бесконечности и осуществимости. В частности, автор исследует вопрос о допустимости определенных формальнологических средств в теориях, использующих те или иные абстракции бесконечности и осуществимости, что представляет интерес для многих отраслей науки, а также для изучающих современную формальную логику.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 24.09.2004 г.
Формат 60×90/16. Тираж 320 экз. Печ. л. 12,5. Зак. № 2-1557/728.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

**ISBN 5-354-00975-8**





1893 ID 24508
9 785354 009756 >

ПРЕДИСЛОВИЕ

# ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ПЕТРОВ

## Контуры жизни и научной деятельности [1)]

Автор этой небольшой книги принадлежал к числу наиболее глубоких логиков-философов и методологов советского периода нашей истории. Вдумчивый ученик доктора физико-математических наук, профессора механико-математического факультета Московского государственного университета — Софьи Александровны Яновской, он на протяжении десятилетий свято чтил ее завет: преданно служить расширению знания. Жизнь Юрия Александровича была непростой, и причиной этому были как трудности повседневного советского бытия, так и особенности его личности. Но обо всем по порядку.

***Жизнь.*** В возрасте семи лет Юра Петров оказался круглым сиротой. Родился он в г. Тюмени. Как писал Ю. А. в своей автобиографии, ему «от других было известно, что мать была домохозяйкой, а отец где-то работал». С 1934 г. маленький Юра Петров воспитывался в детском доме Малаховского детского городка Московский области. Покинув самовольно это воспитательное учреждение с целью найти работу, он в результате утерял сведения о том, когда он родился, и дата его рождения — 20 августа 1927 г. не точна не только до числа и месяца, но и до года. Она была проставлена в его документах наобум, когда он начал работать.

Известно, что Ю. А. был электромонтером в Казани, куда вместе с предприятием, где он работал, в октябре 1941 г. был эвакуирован из Москвы. Он помнил московские события достопамятного 16 октября, когда немецкие войска были у ворот

[1)] Статья подготовлена в рамках проекта РФФИ, № 04–06–80242 при участии И. С. Верстина.

столицы, заводы стали, «беженцы» на казенных машинах со своим скарбом спешно покидали город, милицию с улиц как ветром сдуло, а чекисты в своих кабинетах жгли документы. Как и Юра, я тоже помню все это, но мы, конечно, не знали тогда, что правительство уже перебралось в Куйбышев (город, которому ныне возвращено его исконное название — Самара), но Сталин в последний момент отказался покинуть Москву.

Когда Ю. А. вместе со своим предприятием оказался в г. Орджоникидзе (городе, которому ныне возвращено его исконное гордое название — Владикавказ), его призвали в армию. В 1944–1945 гг. он служил рядовым в 116 полку НКВД, расквартированном на Кавказе и был свидетелем (но не участником) депортации чеченцев и ингушей с их родных земель. Затем Ю. А. — курсант Военно-политического училища пограничных войск в Харькове (1945–1948). В 1950 г. Ю. А. Петров назначается заместителем начальника политотдела по работе с комсомольцами 110-го отряда погранвойск МВД в Бухте Провидения (Чукотский национальный округ), откуда в 1953 г. переводится на должность заместителя по политчасти начальника погранзаставы в Приморский край.

Во время службы в советской армии Ю. А. с отличием окончил вечернюю среднюю школу: он всегда учился хорошо. «Отбарабанив» десять армейских лет, Ю. А. Петров в 1954 г. поступил на философский факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. И в том же году был демобилизован из армии в звании старшего лейтенанта.

Хорошо известно, как трудно после армейской жизни втягиваться в ученье. Для Ю. А. трудностей, однако, не было. Из всех специализаций, существовавших тогда на философском факультете, он избрал по настоящему трудную — логику. Он овладел «традиционным» логическим учением, он слушал лекции С. А. Яновской по математической логике. В конце концов он стал ее учеником, под ее руководством на третьем курсе (весной 1957 года) написал курсовую работу, о которой тогда же сделал доклад на семинаре, которым руководила Софья Александровна.

Я принимал участие в работе этого семинара и записал доклад Петрова. Доклад носил сугубо технический характер: С. А. старалась приучить логиков-философов к работе с математико-логическим аппаратом. Доклад Ю. А. представлял собой реферат статьи «Вычислительная логика», опубликованной в «Журнале символической логики» в 1949 г. Докладчик охарактеризовал цель реферируемой работы: предложить метод, позволяющий вычислительной машине определять порядок выполнения операций, содержащихся в заданной формуле логики высказываний.

В качестве исходной операции принималось отрицание дизъюнкции $a \vee b$, называемое часто штрихом Нико и обозначаемое как $a \downarrow b$ (этой операции, как известно, достаточно для построения алгебры высказываний; при этом вместо $a \downarrow b$ автор реферируемой статьи предлагал писать просто $ab$). Формулы строились по ассоциации влево в стиле бесскобочной записи Лукасевича; запись $a2$ означала отрицание высказывания $a$, а двойка выражала константу «ложь», «истина» представлялась как 22. Использование знаков «плюс» и «минус» (так что «+−» принималось равным «−», а «−−» — равным «+»), позволяло построить метод определения выполнимости, тождественной истинности либо тождественной ложности выражений логики высказываний.

Выбор этой статьи для реферирования со стороны С. А. не был случаен: в это время она читала лекции (преподавателям кафедры логики философского факультета и студентам), которые слушал Петров, где излагалась сходная методика, разработанная И. И. Жегалкиным для того же фрагмента логики. Так Ю. А. набирался навыками логической техники, что впоследствии потребовалось ему, например, при разработке своего варианта логической теории вопросительных предложений.

По окончании в 1959 г. философского факультета Ю. А. Петров был принят в аспирантуру по кафедре логики, и его научным руководителем, естественно, стала С. А. Яновская. Тема, разрабатывать которую она предложила своему ученику, относилась к проблематике математических абстракций и категорий осуществимости и бесконечности. В 1964 г. на ученом совете Института философии АН СССР Ю. А. защитил кандидатскую диссертацию, носившую название «Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости», и в 1964–1965 гг. опубликовал ряд статей, отражавших ее содержание.

В советские времена существовала система «распределения» молодых специалистов, и Ю. А. могли отправить на работу далеко от Москвы (меня, например, пытались «распределить» в город Чимкент). Но Софья Александровна заботилась о своих учениках, особенно о тех, кто проявлял явную склонность к научной работе. Чтобы оставить в Москве Петрова, срок пребывания которого в аспирантуре заканчивался в 1962 г., она предприняла неординарный шаг: использовала свою давнюю дружбу с ректором МГУ академиком Иваном Георгиевичем Петровским. Она пришла к нему на прием и дала знать, что беседа их будет носить частный характер. В те годы существовали система подслушивания разговоров и прослушивания телефонных переговоров; это особенно касалось лиц, занимавших высокое социальное положение. Для подслушивания использовались телефонные аппараты.

А ректорский стол был уставлен телефонами. Иван Георгиевич отвел Софью Александровну в угол кабинета, подальше от своего стола, и Софья Александровна рассказала ему о своем способном ученике и попросила оставить его в МГУ. В результате было принято решение назначить его на кафедру философии естественных факультетов университета. И. Г. Петровский, выполняя ее просьбу, своим приказом назначил Петрова Юрия Александровича ассистентом названной выше кафедры — минуя обычные в таких случаях согласования. А своему ученику С. А. наказала — на кафедре, на которую его определил ректор, вести себя тише воды, ниже травы...

После защиты кандидатской диссертации Ю. А. был переведен на должность старшего преподавателя, потом избран доцентом, и это ученое звание было утверждено за ним Высшей аттестационной комиссией.

Преподавал Ю. А. диалектический материализм, насыщая свой курс сведениями по философии математики. Он читал лекции и вел семинарские занятия на механико-математическом факультете, потом также на факультете вычислительной математики и кибернетики. Конечно, он охотно перешел бы на кафедру логики философского факультета, и был момент, когда это казалось возможным, — это был год, когда кафедрой логики заведовал ученик Яновской профессор Игорь Сергеевич Нарский. Но несмотря на поддержку профессора этой кафедры Евгения Казимировича Войшвилло, высоко ценившего Ю. А., большинство ее членов воспротивилось этому: всем известна была резкость оценок, которые давал Ю. А. слабым педагогам и слабым научным работам, его неукоснительная принципиальность. Кроме того Петров не был на факультете, как говорится, «своим человеком». И Юрий Александрович остался на кафедре философии естественных факультетов, где после защиты в 1973 г. на ученом совете философского факультета докторской диссертации «Математическая логика и гносеология» получил ученое звание профессора.

В середине 70-х гг. у Ю. А. Петрова возник конфликт с руководством факультета вычислительной математики и кибернетики. Читая лекции и проводя семинарские занятия со студентами этого факультета, Ю. А., ссылаясь на авторитет Энгельса, проводил различие между «чистой» и «прикладной» математикой. Руководство факультета — а деканом был академик А. Н. Тихонов — сочло такое противопоставление «двух математик», из которых вторая была как бы ниже рангом, чем первая, неприемлемым. Был поставлен вопрос об отстранении Ю. А. от преподавания философии математикам и кибернетикам. Результатом явился перевод Петрова на философский факультет, где он с 1975 г. стал профессором кафедры диалектического материализма (в постсоветское время переименованную в кафедру методологии и философии науки).

В жизни Ю. А., как и всякого крупного специалиста, были периоды и успехов, и трудностей. Одно время его работы подвергались необоснованной идеологизированной критике — а публикаций у него было уже очень много. Интересна тактика, которую Ю. А. избрал в качестве формы своей защиты. На заседаниях, где происходила «проработка» его трудов, он предпочитал не возражать, а ...молчать. Как он мне рассказывал, это производило на его критиков обескураживающее воздействие.

Долгие годы Ю. А. был секретарем комиссии ВАКа по философии и строго отстаивал и букву, и дух ваковских требований, всячески препятствуя присвоению ученых степеней лицам, их не заслуживающим. В 1979 г. Ю. А. прошел годичную стажировку в США; кроме того он был «гастпрофессором» в ряде зарубежных университетов (Швеция, Чехословакия и др.), участником ряда международных философских и логических конгрессов.

Осенью 1993 г. Юрия Александровича поразил тяжелый недуг. Он утратил способность вести педагогическую деятельность, и на факультете в конце концов его перевели на должность профессора-консультанта. Но и прикованный к дому — посещение университета стало для него уже невозможным. — *Ю. А.* продолжал научную работу (хотя и в существенно меньшем масштабе), обсуждал проблемы методологии науки со своими младшими коллегами.

Что же нового он внес в логику и методологию научного познания, в чем были сильные и в чем слабые стороны его философских воззрений?

***Осуществимость и бесконечность. Математический аспект отображения движения.*** Кандидатская диссертация Ю. А. Петрова 1964 года[2)] представляла собой отражение и развитие воззрений С. А. Яновской. Следуя ходу мыслей своего учителя, диссертант сосредоточил внимание главным образом на двух логических проблемах, связанных с математической бесконечностью. Одна из них касалась преодоления формально-логических противоречий в теориях, использующих категорию бесконечности. Другой проблемой явился вопрос о зависимости логических средств

---

[2)] *Ю. А. Петров.* Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. Автореф. дисс. на соискание уч. степ. канд. филос. наук. АН СССР. Сектор логики. М., 1964.

от характера той бесконечной области, в рассуждениях о которой они применяются. Решение этих проблем, подчеркивал диссертант, требует определенных идеализаций, смысл которых состоит в том, что некоторые задачи «принимаются за решенные». Так, на любые множества, в том числе и актуально бесконечные, можно смотреть как на «разрешимые», если принять, что вопрос о принадлежности произвольного элемента такого рода множеству заранее решен. Это делает допустимым использование в рассуждениях об объектах данного множества законов классической логики, в том числе закона исключенного третьего. Но заняв такую позицию, следует помнить, что она предполагает столь сильную идеализацию, что грань между конструктивным и неконструктивным в математическом мышлении стирается. Это значит, что принятие в математике классической логики в полном ее объеме допустимо лишь до тех пор, пока для математических рассуждений не существенна их конструктивность. В противном случае от такой идеализации следует отказаться и принять идеализацию более слабую, например идеализацию алгоритмического построения объектов в рамках абстракции потенциальной осуществимости.

Обращаясь к вопросу об отображении движения в логике понятий — вопросу, впервые остро поставленному апориями Зенона, Ю. А. в своей диссертации отстаивал следующий взгляд: если пытаться разрешать возникающие здесь трудности с помощью идеальных математических объектов (точки, моменты времени), то следует отказаться от аппеляции к чувственным данным. Это, однако, не означает умаления значимости последних. Решение парадоксов движения требует, с одной стороны, уточнения смысла тех понятий, с помощью которых описывается движение, а с другой стороны, строгого разграничения теорий, основанных на математических и логических идеализациях, и теорий, базирующихся на категориях, отображающих эмпирический опыт. Совокупное знание о движении не укладывается в какую-то одну теорию — оно требует привлечения целого ряда теоретических конструкций.

Не стоит более подробно говорить обо всех этих вопросах, так как подробное освещение их читатель найдет в публикуемой ниже монографии Ю. А. Петрова.

***Соотношение формальной, математической и диалектической логики.*** В 60-е годы среди философов велись дискуссии о соотношении формальной логики в ее современном виде и логики математической, а также о том, в каком отношении друг к другу находятся формальная и математическая логика, с одной стороны, и логика диалектическая — с другой. В этих дискуссиях определились *две альтернативные позиции*. Одну из них представляли поборники такой диалектической логики, которая противопоставлялась логике формальной и математической, — В. И. Черкесов, М. Н. Алексеев, В. И. Мальцев и ряд их сторонников. Им возражали И. С. Нарский, Е. К. Войшвилло, Д. П. Горский и другие. Это коллизия описана мною в отдельной статье[3], и я не буду здесь останавливаться на деталях. Отмечу лишь позицию Ю. А. Петрова.

Юрий Александрович решительно выступил против лже-диалектиков типа В. И. Черкесова. Так, в совместной с Д. П. Горским статье он отстаивал *логический* статус математической логики, указывал на преемственную связь между так называемой традиционной логикой и современными формально-логическими теориями; подчеркивал, что и для современной формальной логики, и для логики математической понятие истины и разработка путей ее достижения являются фундаментальными задачами. Ибо «исследуя пути познания истины, современная формальная логика <...> научилась абстрагировать формальную правильность (логическую форму, логический синтаксис) от истинности (логического содержания, логической семантики), изучать их точными методами, устанавливать между ними такие *взаимосвязи*, которые в противном случае просто не могли бы быть вскрыты»[4]. Единство современной формальной и математической логики обосновывалось путем указания на то, что в обеих логиках фигурируют одни и те же понятия — функция истинности, предикат, логическое следование, закон логики и др. Что касается логики диалектической, то для нее характерны совсем иные понятия: *развитие познания, закономерности научного исследования*.

Рассматривая диалектическую логику как науку о развитии знания, Д. П. Горский и Ю. А. Петров сочли возможным трактовать ее как метатеорию — теорию развития теорий. При этом было указано на недопустимость смешения диалектических противоречий бытия и познания, неотделимых от живого развития науки, с формально-логическими противоречиями, которые запрещает закон противоречия формальной (математической) логики. С полным основанием был отвергнут взгляд на диалектическую логику как на некую «высшую» науку — по сравнению с логикой

---

[3] *Б. В. Бирюков.* Борьба вокруг логики в Московском государственном университете в первое послесталинское десятилетие (1954–1965) // Логика и В. Е. К. К 90-летию со дня рождения Войшвилло Евгения Казимировича. М., Изд-во «Современные тетради», 2003 [МГУ им. М. В. Ломоносова. Философский факультет. К 250-летию Московского ун-та].

[4] *Д. П. Горский, Ю. А. Петров.* Об определениях формальной и диалектической логики и их взаимосвязи // Философские науки, 1967, № 4.

формальной, взгляд, который пытались отстоять философы типа В. И. Черкесова и М. Н. Алексеева.

***Формализованный язык. Синтаксис и семантика.*** Начиная со второй половины 60-х годов Ю. А. Петров уделял большое внимание выявлению познавательной роли формализованных языков. Наиболее важную черту последних он видел в том, что они являются инструментом уточнения (экспликации) научных понятий, а тем самым орудием внесения ясности в знание об отображаемых в них объектах. Различая два этапа формализации — более низкий, когда уточняются только специфические термины формализуемой области знания, и более высокий, когда формализация распространяется и на логическую сторону соответствующей теории, он естественным образом обратился к рассмотрению *синтаксиса* и *семантики* формализованных языков. Если для естественных языков различение их синтаксической и семантической сторон доставляет большие трудности, то для языков формализованных эти трудности снимаются благодаря конструктивизации их синтаксиса и возможности использования такой семантики, которая, в отличие от смысловой стороны естественных языков, моносемантична.

Семантические свойства формализованных языков изучаются, как известно, в *логической семантике*, которая содержит правила обозначения (для терминов) и правила установления истинности (для высказываний). Ю. А. в этой связи подчеркивал, что уточнение семантики формализованных языков — непростая задача. И если она в той или иной мере решается, формализованный язык доставляет много гносеологически ценного. Он способствует выявлению сущности отображаемых в теории объектов, позволяя представлять соответствующие понятия «в так называемом чистом виде, т. е в наиболее полном отвлечении от всего несущественного»[5]. Формализованный язык дает возможность заменить использование абстрактных понятий оперированием представляющими их символами как конструктивными материальными объектами; это Ю. А. отнес к особому случаю «восхождения от абстрактного к конкретному». Такой прием позволяет «концентрировать» знания о самых разнообразных, но изоморфных системах объектов; он служит проверке правильности научных рассуждений; он способствует переходу от более очевидных истин к истинам менее очевидным. Указав на хорошо известный факт невозможности создания формализованного

---

[5] *Ю. А. Петров.* Гносеологическая роль формализованных языков // Язык и мышление. М., «Наука», 1967, с. 263.

языка, который охватил бы все человеческое знание, Ю. А. вместе с тем выделил науки, которые более способны к формализации (математика, классическая механика, термодинамика и ряд других), — в отличие от тех областей знания, которые находятся, по его выражению, еще в «досистемном периоде» развития.

Свои синтактико-семантические рассмотрения Ю. А. конкретизировал на различном логическом материале. Так, он подверг анализу[6] экзистенциальные суждения, т. е. суждения формы $(\exists x)\,A(x)$, трактуя их как функции от общего имени $xA(x)$, охватывающего все предметы, имеющие свойство $A$. Экзистенциальное суждение, согласно Ю. А. Петрову, это не просто суждение, которое истинно, когда множество предметов, подразумеваемых данным именем, — $\{xA(x)\}$ не пусто, и ложно в противном случае, — это такое суждение, которое содержит в себе двойное утверждение: что существует некий предмет по имени $a_i$ и что этот предмет обладает свойством $A$. При этом предмет $a_i$ в одной теории (например физической) может рассматриваться как существующий, а в другой теории (например математической) — как несуществующий. Возвращаясь к идеям, сформулированным в диссертации 1964 г., и выделяя три вида осуществимости — материальную, потенциальную и логическую, Ю. А. предложил связывать с каждой из них свою предпосылку существования объекта. Вообще же вопрос о наличии предметного значения (денотата) у некоторого имени $a_i$ — необходимого условия того, чтобы денотат имел свойство $A$, — решается лишь относительно того понимания осуществимости объекта, которое приемлемо в данной теории.

***Философия математики.*** Еще занимаясь в университете, особенно в период аспирантуры, Ю. А. находил время слушать лекции на механико-математическом факультете; это были лекции по таким ведущим математическим дисциплинам, как алгебра и математический анализ, а также, конечно, по предметам математико-логического цикла (теория множеств, математическая логика, теория алгоритмов и др.). Позже он — уже самостоятельно — изучал ведущие дисциплины физического цикла: классическую и релятивистскую механику, классическую термодинамику. Поэтому его работы по философским основаниям математики и его экскурсы в философию физики имели прочный конкретно-научный фундамент. Его работы по философско-математическим

[6] *Ю. А. Петров.* К вопросу о существовании значения общего имени в экзистенциальных высказываниях // Проблема знака и значения. Под ред. И. С. Нарского. [М.], Изд-во МГУ, 1969.

вопросам — в большинстве своем написаны они были уже после кончины его научного руководителя — свидетельствуют о его солидной математической эрудиции.

Обратимся, например, к двум публикациям Ю. А. философско-математической тематики — одна из них представляет собой журнальную статью, другая — брошюру, предназначенную для широкого читателя[7]. Пусть не обманет нас то, что последняя была выпущена в издательстве «Знание»: вопросы, которые в ней рассматриваются, достаточно серьезны.

Ю. А. исходил из общепринятого, как он говорил, подразделения всей области математического знания на «чистую математику» (или собственно математику), прикладную математику и метаматематику. Далее, однако, следуют дистинкции специфически «петровского» рода: собственно математика подразделяется им на *содержательную* и *формальную*. И та, и другая имеют дело с абстрактными, идеализированными объектами; им чужды какие-либо эмпирические интерпретации. Таковые имеют место только в построениях прикладной математики. Что касается математики «формальной», то главным отличительным ее признаком Ю. А. считал применение аксиоматического метода.

В своем противопоставлении «чистого» и «прикладного» в математическом мышлении Ю. А. Петров опирался на Ф. Энгельса, который писал о чистой математике, что хотя она и имеет своим предметом «пространственные формы и количественные отношения действительного мира», она, исследуя эти формы, совершенно отделяет их от их (материального) содержания, оставляя последнее в стороне «как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины»[8].

Как говорилось в начале этой статьи, противопоставление «математически чистого» и «математически прикладного», к тому же связываемого с эмпирической интерпретацией и непосредственной счетной практикой, вызвало протест со стороны представителей вычислительной математики. Думается, что Ю. А. был не совсем прав в этой своей дистинкции. Он не обладал той интуицией, которая была присуща математикам-прикладникам. Последние как бы предчувствовали будущий виртуальный компьютерный мир, в создании которого тогда делались лишь первые шаги. К сожалению, Ю. А. не осознал этого обстоятельства

---

[7] *Ю. А. Петров.* О методологии обоснования математики // Вопросы философии. 1972, № 4; *его же.* Философские проблемы математики. М., «Знание», 1973.

[8] *К. Маркс и Ф. Энгельс.* Соч., т. 20, с. 37.

и в последующие годы, когда этот мир властно заявил о себе, перевернув прежние представления о соотношении «чистой теории» и ее компьютерной «реализации». Мышление Ю. А. вообще было не очень гибким, и от раз принятых положений он десятилетиями не отказывался.

Однако в истолковании особенностей, присущих разным направлениям содержательной и формальной математики, а также метаматематики, Ю. А. ухватывал суть дела. Он указывал, что различия между классической теоретико-множественной математикой и математикой конструктивистской, такими направлениями в обосновании математического знания, как логицизм Рассела[9], финитизм Гильберта и интуиционизм Брауэра и Г. Вейля, коренятся в различном характере заложенных в них принципов, в разном характере используемых идеализаций; абстрактные объекты, рассматриваемые сторонниками этих направлений, различны. «Поэтому объект, существующий с точки зрения одних принципов, может считаться несуществующим с точки зрения других принципов»[10].

Особое внимание Ю. А. Петров уделял раскрытию философского значения таких проблем, как проблемы равенства (тождества) объектов и непротиворечивости теорий; как вопросы, относящиеся к дедуктивной полноте теоретических построений и независимости аксиом, лежащих в их основе; как проблема разрешения формальных систем, а также, конечно, такому кардинальной значимости факту, как внутренняя ограниченность формализации, высвеченная К. Геделем. Все эти вопросы были подробно проанализированы Ю. А. в его монографии 1974 года, в основе которой лежала его докторская диссертация.

***Логический анализ категорий диалектики.*** Проблематика методологии научного познания, как следует из сказанного выше, всегда была областью исследований Ю. А. Она представлена, например, в журнальной публикации конца 60-х годов. В ней научное познание трактуется как движение от понятий к суждениям, а от них — к построению научных теорий и их языков, причем большое внимание уделяется «сопровождающим» их формам познания (проблема, гипотеза, объяснение, предсказание, эвристика и др.). К кардинальным вопросам гносеологии «абстрактных наук» Ю. А. относит: методологические условия введения научных

---

[9] Правда, Ю. А. ошибался, однозначно причисляя к сторонникам логицизма Г. Фреге. Логическое обоснование на всю математику Фреге не распространял, считая, что геометрия имеет свой особый «познавательный источник».

[10] *Ю. А. Петров.* О методологии обоснования математики, с. 65.

понятий, методы обоснования истинности суждений, логические свойства *языков* науки, методологию построения и обоснования теорий, принципы их развития, наконец, формы и методы научного исследования. При этом, как преподаватель диалектического материализма студентам — будущим математикам, Ю. А. должен был корректно освещать проблематику «диамата», и работая над этим, он обратился к вопросу о логической роли диалектических категорий, посвятив этому одну из своих монографий[11]. В ней неотъемлемое место заняли вопросы, связанные с метатеоретическими рассмотрениями: они составили тот фон, на котором диалектические категории (вокруг которых марксиствующие философы успели нагородить массу нелепиц) приобрели вполне осмысленный вид.

Фон, о котором идет речь, представлял собой описание движения философской мысли от общего — метатеоретического — уровня анализа языковых систем вообще (с учетом многообразия их различных видов) к рассмотрению более специальных видов языков и теорий, особенно формальных. Уделяя должное внимание вопросам метатеоретического содержания чисто содержательных языков и теорий — ведь категории диалектического материализма существенно содержательны. — *Ю. А.* все же акцентировал аспекты их формализации, так как только это позволяет произвести должный логический анализ таких категорий, как сущность и явление, форма и содержание и пр. При этом в рассмотрение вводился широкий спектр средств экспликации понятий, включающий, в частности, семиотические аспекты (когда наряду с синтактикой и семантикой привлекается и прагматика). Примечательно, что проводимый Ю. А. Петровым категориальный анализ не «подменял» диалектическое логико-семиотическим — последнее служило средством раскрытия природы диалектических категорий.

Следует подчеркнуть, что для Ю. А. диалектика всегда оставалась по своей сути *материалистической.* В этом отношении наши взгляды — Юрия Александровича и мои — решительно разошлись, так как я уже в 60-х годах осознал всю ложь и вред материализма, неотделимого от атеизма.

***Докторская диссертация Ю. А. Петрова и ее кибернетические аспекты.*** В 1972 г. Ю. А. завершил подготовку докторской диссертации «Математическая логика и гносеология». Она вобрала в себя те идеи, о которых я вел речь выше. Как водится, на дис-

---

[11] *Ю. А. Петров.* Логическая функция категорий диалектики. М., «Высшая школа», 1972.

сертацию должен был быть дан отзыв так называемой «третьей организации» (первые две — это организация, где готовилась и получила одобрение диссертация, и организация, принявшая ее к защите; эти организации могли и совпадать). Диссертация Ю. А. Петрова поступила на отзыв в Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» при Президиуме АН СССР, а точнее говоря — в Секцию философских вопросов кибернетики, существовавшую в этом Научном совете. Председателем Научного совета по кибернетики (НСК) был академик А. И. Берг, а автор этих строк — заместителем председателя названной выше секции.

Передо мной лежит копия отзыва о диссертационной работе Ю. А., подписанная председателем Секции доктором философских наук А. Г. Спиркиным, двумя членами Секции — доктором философских наук И. Б. Новиком и кандидатом физико-математических наук А. С. Кузичевым, а также, конечно, Б. В. Бирюковым[12]. В документе значится, что отзыв был утвержден в июне 1972 года на Ученом совете НСК. Защита диссертации состоялась в следующем году и проходила на философском факультете МГУ. Она впоследствии легла в основу книги Юрия Александровича, в которой главные результаты математической логики анализировались в свете материалистической диалектики[13].

Главная тяжесть составления отзыва легла на меня как штатного сотрудника кибернетического совета. В соответствии с научными интересами НСК в отзыве главный упор был сделан на тех сторонах работы Ю. А. Петрова, которые были связаны с тематикой возглавлявшейся А. И. Бергом организации. Поэтому в нем говорилось в основном о том, какое значение работа Ю. А. имеет для решения задач моделирования мышления — направления исследований, которое в НСК было одним из главных. Кроме того содержание данного диссертационого исследования ставилось в связь с проблематикой теоретической и технической кибернетики, а также семиотики (каждое из этих направлений было в НСК представлено соответствующей секцией).

Ниже я сосредоточусь на вопросах *моделирования мышления*. Известно, что достаточно адекватное модельное представление мыслительных операций с использованием теоретического и прикладного аппарата кибернетики успешно только тогда, когда в нем учитывается человек *говорящий*, а значит — ин-

---

[12] Документ хранится в моем личном архиве.

[13] *Ю. А. Петров.* Математическая логика и материалистическая диалектика. (Проблема логико-философских оснований и обоснования теорий). 1974, [М.], Изд-во МГУ.

теллектуальная коммуникация. Последняя означает диалогическое (точнее, полилогическое) общение коммуникантов, которое в большинстве случаев выливается в вопросно-ответные процедуры. Изучение их предполагает семиотическую интерпретацию и логическую формализацию. Последняя же требует разработки теории вопросительных предложений — *интеррогативной логики*, как на содержательном, так и на формальном уровне.

Ю. А. Петров в ряде своих работ — некоторые из них были выполнены в содружестве с профессором кафедры логики философского факультета МГУ Е. К. Войшвилло и белорусским ученым (г. Могилев) профессором А. А. Столяром — разработал оригинальный вариант экспликации «языка вопросов» и логического уточнения интеррогативного мышления. Ниже я в отдельном разделе остановлюсь на формализации, разработанной Ю. А. Петровым, а пока замечу, что в ней формулировались правила образования и преобразования интеррогативных предложений, а также правила их осмысления (их семантика). При этом было показано, что предлагаемая формализация соответствует операциям содержательного интеррогативного мышления. Таким образом была предъявлена модель некоторой части содержательного мышления и естественного языка, и надо сказать, что в этом отношении подход Ю. А. отличался от установок иных логиков, озабоченных построением исчислений, не связываемых с какими-либо реальными познавательно-коммуникативными процессами.

В диссертации Ю. А. — и в соответствующей книге — большое внимание было уделено вопросам семиотики. Введя понятие семиотических инвариантов, диссертант провел различие между синтаксической, семантической и гносеологической теориями («логиками») как системами правил, сохраняющими соответствующий инвариант. Это открывало путь к решению проблемы обоснования семиотически разнородных теорий — вопросу, который стал одним из центральных в последующих методологических изысканиях Юрия Александровича.

В отзыве о диссертации Ю. А. отмечалась, что проведенное в ней рассмотрения абстракций, названных «фактической осуществимостью» и «фактической бесконечностью», значимы для кибернетики. Эти абстракции вообще мало исследованы, хотя находят все большее применение в науке об управлении и переработке информации. «Разумеется, в какой-то мере и в каком-то виде они — быть может неявно — вводились и использовались и ранее, — говорилось в отзыве. — Однако автор сформулировал их в явном виде, дал логическое обоснование введению этих абстракций и предпринял попытку изучить их свойства». Вместе с тем в упрек диссертанту ставилось то, что в его работе почти не затрагивались гносеологические и методологические проблемы эмпирических наук. «Между тем известно, — говорилось далее, — что математическая логика имеет немаловажное значение для их решения, а сами эти проблемы тесно связаны с приложениями кибернетики в науках о природе, обществе и человеке».

*Методология научного познания.* На протяжении длительного пути в науке Ю. А. сотрудничал со многими своими коллегами: с Е. К. Войшвилло, когда разрабатывал вопросы теории вопросительных предложений; с А. А. Столяром и Л. М. Фридманом, когда занимался приложениями логики в обучении; с А. Л. Никифоровым, когда вместе с ним создавал монографию по логике и методологии науки; с Э. З. Феизовым и А. А. Захаровым, когда в центре научных интересов Ю. А. стали вопросы, связанные с соотношением («соизмеримостью») научных теорий различного уровня общности. Были и работы, которые мы с Юрием Александровичем выполнили совместно. Здесь я сосредоточусь на монографии, в которой соавтором Ю. А. Петрова выступил А. Л. Никифоров[14].

Задача данного труда состояла в том, чтобы выявить методы, «задействованные» в процедурах введения научных понятий и в их применения в познавательном процессе, в постановке проблем и их решении, в установлении смысла и истинности суждений, в построении языков науки и базирующихся на них теорий, в становлении иных форм гносеологического процесса.

С середины 60-х годов прошлого века в отечественную философскую литературу вошел — и стал широко использоваться — термин «логика и методология научного исследования»[15]. Причина его популярности заключалась в том, что он допускал самые различные толкования. В книге Ю. А. Петрова и А. Л. Никифорова данный термин служил для обозначения единой науки, в которой изучается структура процесса познания, методы построения, организации, обоснования и развития научного знания. При этом подчеркивалось, что данная дисциплина имеет свои философские (в том числе гносеологические), логические, метатеоретические и семиотические основания. «Поэтому, — писали авторы, — исследование познания почти всегда является комплексным исследованием, одновременно использующим методы гносеологии, логики, семиотики и метатеории»[16].

---

[14] *Ю. А. Петров А. Л. Никифоров.* Логика и методология научного познания. [М.], Изд-во МГУ, 1982.

[15] История его появления освещена в моей статье, указанной в примечании 3.

[16] *Ю. А. Петров, А. Л. Никифоров.* Указ. соч., с. 16.

В книге была предложена классификация научных абстракций (понятий науки), условия их введения в рассмотрение в рамках определенной области знания и исключения их при приложениях теории, когда решаются конкретные задачи. В частности, предлагалось различать понятия, собственные для данной сферы знания, и понятия вспомогательные (с точки зрения решаемых задач). Что касается известного различения исходных (в данной теории) понятий и понятий производных, зависящих от исходных, то внимание авторов было сосредоточено на понятиях первого рода — на введении собственных исходных абстракций; при этом был сформулирован целый веер правил (условий) такого введения — целесообразность, адекватность (существу дела), взаимносогласованность (непротиворечивость) и исключаемость в определенных контекстах.

В монографии представлен и анализ различных *видов истинности*, таких, как аналитическая (логическая и фактуальная) и эмпирическая — вопрос, к которому у нес еще будет повод вернуться. Предлагалась и классификация языков науки, причем такая, что в ней учитывался как семиотический, так и логический аспекты соответствующих теорий. Принимая известное определение теории как правильного подмножества предложений ее языка, удовлетворяющих определенным гносеологическим постулатам (например, постулату сохранения истинности), авторы вместе с тем обосновывали необходимость более «узких» — то есть содержательных — истолкований теорий конкретных типов, в числе которых были «обычные» естественные и общественные науки.

Известно, сколько трудностей доставляет различение *динамических* и *статистических* законов (закономерностей), различение, столь важное для философии физического знания. Ю. А. Петров и А. Л. Никифоров решают вопрос, «разводя», с одной стороны, динамические и статистические процессы (как закономерности объективного характера), а с другой стороны — динамические и статистические законы (как отображения этих закономерностей). Обоим категориальным парам дается независимое определение — в одном случае с помощью понятия причинности, в другом — путем противопоставления детерминированных и вероятностных функций.

Оригинально решался авторами и вопрос об источниках развития научных теорий, включая феномен научных революций. Они видели этот источник, в частности, в динамике соотношения собственных и философских оснований теорий. Из-за относительной независимости развития этих оснований может происходить их «рассогласование», влекущее коренные изменения тех или других; в конце концов нарушенное соответствие восстанавливается, но уже на ином, более высоком уровне развития знания. С этих позиций Ю. А. Петров и А. Л. Никифоров критически оценивали известные теории К. Поппера, Т. Куна и П. Фейерабенда.

***Теоретическое и эмпирическое познание. Принцип соответствия.*** В 1983 году Ю. А. Петров опубликовал монографию[17], на которую я в период прохождения ее в издательстве дал официальный положительный отзыв. В монографии рассматривалось противоположение теоретического и эмпирического в науке. К теоретическому познанию были отнесены так называемые абстрактные теории, а также такие фрагменты эмпирических теорий, в которых используются абстрактные объекты. Хотя подразделение теорий (а более общо — наук) на теоретические и эмпирические довольно условно, оно приобретает смысл тогда, когда ставится задача выявления их специфики. А это составляет задачу гносеологии. Только при таком подходе, указывал Ю. А., можно провести различие между математикой и формальной логикой. Хорошо известные логицистский и формалистский подходы в философии математики страдают, оба, тем изъяном, что предлагают положить в основу данной дистинкции либо логическое (логицизм), либо синтаксическое (формализм) основание. В результате в одном случае математику пытаются свести к логики, в другом — логику к математике. Между тем решение вопроса требует более общего подхода, который в истолковании Ю. А. обязан носить многоаспектный характер — учитывать семиотическую, дедуктивную, экспликативную, прикладную и гносеологическую стороны теорий. Как это возможно, Ю. А. еще ранее в серии работ показал, анализируя соотношение «старых» и «новых» теорий. Естественны образом это привело его к переосмыслению известного *принципа соответствия*.

Принцип соответствия относится к соотношению законов старой и новой теорий, причем под новой теорией понимается теоретическое построение, пришедшее «на смену» прежней теории. В литературе вопроса, отмечал Ю. А., это соотношение понимается либо как логическое отношение (между областями истинности законов сравниваемых теорий), либо как математическое отношение — отношение между математическими формулами, выражающими эти законы. Но такое понимание слишком узко; в частности, не принимается во внимание гносеологическое соотношение теорий. Последнее определяется теоретико-позна-

---

[17] *Ю. А. Петров*. Методологические проблемы теоретического познания. [М.], Изд-во МГУ, 1986.

вательными предпосылками, закладываемыми в основание соответствующих теоретических построений, то есть принимаемыми *идеализациями*. Учет последних и составляет, согласно Ю. А. Петрову, главное в принципе соответствия. Последний для Ю. А. имеет смысл только для теорий, которые помимо синтаксиса имеют семантику, — теории число формальные, которые строятся вне возможных их содержательных интерпретаций, остаются при этом в стороне.

Свой подход Ю. А. Петров пояснял на примерах. В статье, относящейся к началу 80-х годов[18], рассматривается соотношение законов сложения скоростей в классический и в релятивистской механике. Для первой этот закон (Ю. А. обозначает его как $\zeta_1$) имеет вид $v = v_1 + v_2$, выражается предикатом $\Pi_1$ и имеет область истинности $O_1$; для второй, релятивистской, действует закон ($\zeta_2$) $v = (v_1 + v_2) : (1 + ((v_1 \cdot v_2) : c^2))$, выражаемый предикатом $\Pi_2$ и имеющий область истинности $O_2$. Соотношение законов $\zeta_1$ и $\zeta_2$ можно понимать либо как отношение между предикатами $\Pi_1$ и $\Pi_2$, либо как отношение между областями их истинности, либо как то и другое вместе.

Если предикаты $\Pi_1$ и $\Pi_2$ интерпретируются, как это обычно бывает, математически, то символы $v, v_1, v_2$ оказываются переменными для действительных чисел, а $c$ — скоростью света. Тогда, после проведения несложных вычислений, обнаруживается, что математический аппарат закона $\zeta_1$ есть частный случай математического аппарата закона $\zeta_2$. Однако это «не решает проблему соответствия самих законов $\zeta_1$ и $\zeta_2$, ибо законы являются суждениями (предложениями), имеющими физическую семантику»[19] и поэтому могут находится в соотношении, отличном от соотношений их математических аппаратов: математическую интерпретацию предикатов $\Pi_1$ и $\Pi_2$ следует отличать от их физической интерпретации. А эти интерпретации для классической и для релятивистской механики различны. Это проявляется, когда мы сопоставляем области истинности соответствующих законов: для $O_2$ это область релятивистских скоростей (не превышающих скорость света), а для $O_1$ — область классических скоростей от нуля до бесконечности. Для понимания существа подхода Ю. А. важно принять во внимание, что с его точки зрения между областями истинности сопоставляемых законов ($\zeta_1$ и $\zeta_2$) не существует логического отношения с точки зрения их общности, но имеются ситуации (задачи), для которых различие упомянутых областей

[18] *Ю. А. Петров, С. А. Омарова.* О гносеологической сущности принципа соответствия // Вестник Московского ун-та. Серия 7: Философия, 1981, № 2.

[19] *Там же*, с. 31.

истинности не существенно. Главное же, однако, заключается в соотношении между гносеологическими предпосылками этих законов: классическая механика более сильно идеализирует реальные движения, чем релятивистская.

Характеризуя гносеологический подход к соотношению «старых» и «новых» теорий, Ю. А. подчеркивал, что подход этот не отвергает ни наличия «логического соответствия между математическими интерпретациями синтаксиса законов теорий, ни теоретико-множественного соответствия „предельного перехода" между областями истинности законов этих теорий. Утверждается лишь наличие более глубокой и более всеобщей характеристики этого соответствия — наличие соответствий гносеологических оснований старых и новых теорий»[20].

***«Раздвоение» предмета теории. Аналитическая и эмпирическая истинность.*** Выше я привел определение теории как такого собственного подмножества предложений ее языка, которое удовлетворяет определенным гносеологическим предпосылкам, особо выделив постулат сохранения истинности. Уточняя это определение, Ю. А. назвал теорией «множество общих, *дедуктивно* организованных, предложений»[21]. Это определение, ограничивающее «сохранение истинности» дедукцией, вряд ли убедительно, поскольку исключает из области знания (теорий) его индуктивную организацию и вообще всю область правдоподобных рассуждений.

Крайний «дедуктивизм» Ю. А. был особенно выраженным в зрелые годы его научной деятельности, впоследствии, когда он обратился к «практической методологии», он был вынужден ввести в рассмотрение и недедуктивные методы расширения знания. Но в статье о «предмете теории», цитату из которой я привел выше, «дедуктивизм» Ю. А. Петрова проявляется в полной мере. Он подразделяет все теории на формальные, обладающие только синтаксисом, и содержательные, которые кроме синтаксиса имеют некоторую семантику, то есть содержание. Семантика составляет предмет (содержательной) теории. До этого пункта изложение Ю. А. еще не несет каких-либо новаций. Положение меняется, когда во внимание принимается наличие разных видов истинности. Их Ю. А. характеризует следующим образом.

Если для установления истинности (суждения, предложения) достаточно учесть свойства логических операций и законов

---

[20] *Там же*, с. 40.

[21] *Ю. А. Петров*. Предмет теории // Вестник Московского университета. Сер. 7: Философия. 1999, № 1. Курсив мой. — *Б.Б.*

логики, то истинность является *логической*[22]. Если же этого не достаточно, и надо принять во внимание дескриптивные термины, которые выражают конкретные свойства предметов, то истинность становится *фактуальной*. Последняя является *эмпирической*, — истинностью «на области материальных объектов»[23], и тогда для ее определения достаточно привлечения эмпирических понятий и методов, основанных (в конечном счете, это обстоятельство Ю. А. забывает оговорить) на чувственных данных. Но фактуальная истинность может быть и *аналитической*, или истинностью «в силу значения слов»[24]. Это значит — истинность предложения содержательной теории аналитична, если для ее установления требуется лишь анализ понятий и установление их содержания путем обращения к смыслу терминов, которые уже так или иначе вербально определены.

Читатель, наверное, уже заметил, что данная классификация видов истинностей (истин) отклоняется от общепринятых представлений, согласно которым всякая логическая истинность является аналитической[25], причем подобная аналитичность распространяется и на формальные теории. К тому же классификация Петрова вызывает ряд недоумений. Например, не ясно, куда же ведет цепочка вербальных определений, к которым, по Петрову, сводится фактуальная аналитическая истинность, — к остенсивным определениям? В ряде работ последующих лет Ю. А. отвечает на этот вопрос утвердительно. Но ведь такого рода определения — путем предъявления примеров, в конечном счете предполагающих апелляцию к наглядному опыту, — лишают предложения теории аналитичности. К тому же, в противоречии с собственными дистинкциями, Ю. А. распространяет понятие аналитичности и на неинтерпретированные аксиоматические теории[26].

Положение усугубляется, когда Ю. А. начинает прилагать свою классификацию истин к различению двух разных предметов одной и той же теории — непосредственного предмета и предмета опосредованного.

---

[22] Весьма ясное разъяснение понятия логической истинности см. в статье: *Ю. Гастев, В. Финн*. Логическая истинность // Философская энциклопедия. Том 3. 1964.

[23] *Там же*, с. 41.

[24] *Ю. А. Петров*. Там же, с. 45.

[25] В монографии, указанной в примечании 14, логическая истинность трактуется как частный случай аналитической истинности, однако эта точка зрения не является у Ю. А. ведущей.

[26] Ср. там же, с. 41.

*Непосредственный* предмет теории — это то, на чем законы теории аналитически истинны. А истинными они могут быть на области «упрощенных и идеализированных материальных предметов или предметов, чисто умственно созданных, вообще не имеющих в природе аналогов»[27]; такая истинность в силу принятых Петровым определений не может быть эмпирической, и в физике поэтому говорят о «физической реальности» — именно она является непосредственным предметом физических теорий.

Теперь об *опосредствованном* предмете теории. Таковую составляют, по Петрову, «приложения теории» как область, где законы теории *эмпирически* истины. «Это область либо идеализированных объектов, не принадлежащих теории, либо область материальных предметов с их материальными отношениями, к которым она применяется»[28]. В этом смысле, согласно Ю. А. Петрову, можно говорить о «прикладной теории» — прикладной математике, прикладной физике, прикладной биологии и пр.

Говорить, конечно, можно, о чем угодно. Но науку интересует *истинно* сказанное. И вряд ли математики и физики согласятся с дистинкциями Петрова. В случае математиков Ю. А. уже столкнулся с их реакцией: математики, которые занимаются решениями теоретических задач, имеющих практическое значение и требующих больших вычислений и использования компьютерной техники, не считают свою область сферой, альтернативной «теоретической» математике. Еще острее обнаруживается шаткость проводимых Ю. А. различений, когда мы обращаемся к теоретической физике. Физик-теоретик, работающий в области, скажем, квантовой механики, никогда не согласится считать свои построения верными лишь «в силу значения слов». Положения Ю. А. Петрова: «Теории только аналитически истинны»; «Теория требует только вербальных определений»[29], — неприемлемы для науки.

Конечно, Ю. А. прав, когда подчеркивает, что «об истинности теорий[30], об их сравнении и т. п. нельзя говорить вне тех идеализаций, на которых они основаны»[31]. Но он не учитывает того, что о теоретической истинности нельзя также говорить вне тех реалий, к которым относится соответствующее теоретическое построение. Во всяком случае в категории «физической реальности» учитывается и то, и другое.

---

[27] *Там же*, с. 39.

[28] *Там же*.

[29] *Там же*, с. 43, 44.

[30] Истинность *теории* означает истинность составляющих ее суждений.

[31] *Ю. А. Петров*. Там же, с. 45.

***Теория вопросительных предложений. Логика и проблемы обучения.*** В 1966 г. в Одессе состоялся Симпозиум по логике и методологии науки, в котором Ю. А. Петров и я принимали участие, а затем составили обзоры его работы, опубликованные в двух изданиях[32]. Мы отметили сделанный на симпозиуме доклад А. А. Столяра «О некоторых применениях логики в педагогике математики», в котором уточнялось понятие задачи путем анализа ее логической структуры. Такое уточнение необходимо в связи с «обучением через задачи». Но, как очевидно, любая формулировка задачи требует использования вопросительных (интеррогативных) форм мышления. Логика понятий, суждений и умозаключений, как известно, достаточно разработана, и в ней широко применяются методы формализации. Относительно *вопросно – ответных* мыслительных и коммуникативных процессов этого сказать нельзя. Между тем выработка умений правильно задавать вопросы и правильно на них отвечать имеет не меньшее педагогическое значение, чем умение определять понятия и строить логические выводы. Отсюда интерес к логике вопросов, проявляющийся как за рубежом, так и в нашей стране. На симпозиуме данной проблеме был посвящен доклад Ю. А. Петрова «О логике вопросительных предложений». Докладчик, используя средства математической логики, подверг анализу логическую структуру вопросов и на этом пути получил уточнение понятия правильно поставленного вопроса.

Так начались многолетние исследования Юрия Александровича в области интеррогативной (называемой также эротетической[33]) логики.

В 1968–1969 гг. его статья на эту тему была опубликована в Трудах XIV Международного философского конгресса[34]. Впоследствии вышло еще с десяток публикаций Юрия Александровича на эту тему, не говоря уже о его монографиях, где проблематика интеррогативного мышления неизменно находи-

---

[32] *Б. В. Бирюков, Ю. А. Петров.* Проблемы логического анализа науки // Информационные материалы [Издание Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР], № 7. М., июнь *1967*; *они же.*Актуальные вопросы логического анализа науки // Философские науки, 1967, № 6.

[33] Последний термин, как отмечается в книге *Н. Белнапа* и Т.Стила «Логика вопросов и ответов» (перев. с англ., общая редакция, предисловие и примечания В. А. Смирнова и В. К. Финна. М.: «Прогресс», 1981) на с. 12, был введен А. и М. Прайорами.

[34] *Ю. А. Петров.* Вариант логики эротетической // Материалы к XIV Международному философскому конгрессу. М., 1968; перевод в издании: Akten des XIV. Internationalen Kongresses fur Philosophie. Wien, 1969.

ла отражение[35]. Ю. А. был в курсе зарубежных исследований в данной области, посвятив этому специальную работу[36].

Две особенности характерны для работ Ю. А. по логике вопросно-ответных процедур. Во-первых, они строились как расширения исчисления предикатов второго (с кванторами по предикатам) порядка с равенством, в отличие, скажем, от книги Н. Белнапа и Т. Стила, исходивших из исчисления первого порядка. Во-вторых, они были существенным образом ориентированы на проблемы дидактики. Первая большая статья Ю. А. по формальному представлению интеррогативного мышления была напечатана в сборнике, посвященном алгоритмизации обучения[37].

Ниже я буду опираться на статью Юрия Александровича, написанную им совместно с Абрамом Ароновичем Столяром, белорусским ученым, ставшим впоследствии проректором Могилевского педагогического института (он разрабатывал проблемы педагогики математики). Статья Петрова и Столяра[38] вошла в сборник, составление и редактирование которого легло в основном на мои плечи.

Роль вопросов в *обучении* трудно переоценить — они пронизывают весь учебный процесс. Поэтому изыскание рациональных методов формирования осмысленных и педагогически оправданных вопросительных предложений и определения правильности ответов на них составляет важную задачу дидактики и специальных методик. При этом надо верно подходить к самому понятию вопроса. Как писал Ю. А. в одной из своих позднейших работ, вопрос есть «форма мышления, которая выражает запрос определенного рода информации об объекте при указании известной об этом объекте информации. Известная информация выражается явно или неявно в предпосылках вопроса»[39]. Ответ на вопрос

---

[35] Надо сказать, что Юрий Александрович не был первым логиком в нашей стране, который занялся интеррогативами. До него работу на эту тему опубликовал одесский логик Ю. И. Зуев; я имею в виду его статью «К логической интерпретации вопроса» в кн. «Логико-грамматические очерки», М., 1961. К слову сказать, зарубежная публикация Т. Кубинского (T. Kubinski), с которой иногда начинается «отсчет» интеррогативной логики, увидела свет (в Трудах XII Международного философского конгресса) всего на год раньше.

[36] *Ю. А. Петров.* Современные логические теории вопроса // Теоретические основы социологического опроса, М., 1972.

[37] *Ю. А. Петров.* Опыт формализации вопросительных предложений (вопросов) // Вопросы алгоритмизации и программирования обучения. М., 1969.

[38] *Ю. А. Петров, А. А. Столяр.* О педагогическом аспекте семиотического анализа вопросов // Логика и проблемы обучения. Под ред. Б. В. Бирюкова и В. Г. Фарбера. М., «Педагогика», 1977.

[39] *Ю. А. Петров, А. А. Захаров.* Практическая методология. Озерск, 2001 (издание Озерского технологического института), с. 58.

есть предложение (суждение), содержащее требуемую информацию. Вопросительное предложение *некорректно*, если не него невозможен ответ. Исследование последнего с точки зрения его правильности и истинности требует анализа явных предпосылок вопроса, а также выявления и проверки неявных предпосылок. Для изучения правильности вопросов и ответов требуется формальный интеррогативный *язык*, а в задачу соответствующей *логики* входит сохранение свойства корректности вопроса.

Ю. А. Петров и А. А. Столяр, опираясь на свои прежние публикации, встали на путь, ведущий от содержательных рассмотрений вопросительных предложений естественного языка к формально-логическому их представлению, развив общий семиотический взгляд на вопросы и ответы на них — *эротетическую семиотику*. Последняя состоит из соответствующих синтактики, семантики и прагматики

В синтактике изучаются правила построения вопросов и ответов, для чего строится формальный язык интеррогативной логики. В семантике этого языка изучается смысл вопросов и ответов, значение предпосылок вопросительных предложений, условия правильности постановки вопросов и ответов на них. В эротетической прагматике рассматриваются условия понимания вопросов и ответов, а также — и прежде всего — их практическая значимость в конкретных областях знания, в данном случае — в педагогике. Здесь целью является формулировка способов преодоления трудностей, связанных с вопросно-ответным отношением в процессе обучения. Логика вопросов опирается на интеррогативный синтаксис и семантику, но не включает в себя соответствующую прагматику. Например, дидактическая максима: избегать вопросов, ответ на которые для учащихся слишком труден либо слишком прост, находится вне области эротетической логики.

Не стану вдаваться в детали построенной Ю. А. логики вопросов. Отмечу лишь самое главное. Формулируется понятие формулы интеррогативной логики и вводится оператор вопроса — вопросительный знак в скобках, указывающий на то, какая компонента формулы ставится под вопрос. Например, формулы $(?a)P(a)$, $(?x)P(x)$, $(?P)P(x)$, $(?X)X(a)$, $(?x)X(x)$, $(?\forall)\forall xP(x)$, $(?\exists)\exists xP(x)$ имеют, соответственно, следующий смысл: «Обладает ли предмет *a свойством P*?» (под вопрос ставится предметная константа $a$); «Какие предметы (из области значений предметной переменной $x$) обладают свойством $P$?» (под вопрос ставится свободная предметная переменная $x$)[40]; «Обладают ли

---

[40] В дальнейшем я не буду указывать, какой элемент интеррогативной формулы ставится под вопрос — это ясно из соответствующей формульной записи.

свойством $P$ предметы из области значений предметной переменной $x$?»; «Какими свойствами из области значений предикатной переменной $X$ обладает предмет $a$?»; «Какие предметы из области значений предметной переменной $x$ обладают свойствами из области значений предикатной переменной $X$?»; «Все ли предметы из области значений предметной переменной $x$ обладают свойством $P$?»; «Существует ли предмет в области значений предметной переменной $x$, обладающий свойством $P$?». Одни из этих вопросов являются прямыми (или *ли*-вопросами), требующими альтернативного ответа — это первый, третий, шестой и седьмой вопросы; остальные вопросы являются непрямыми (или *для каких*- вопросами). Семантика и прагматика последних наиболее трудна для анализа.

Думаю, что из сказанного нетрудно усмотреть, как такого рода формальное представление вопросов распространяется на вопросительные предложения, в которых фигурируют многоместные предикаты. Столь же понятен путь, по которому надо идти, переходя от простых вопросов (не содержащих операций логики высказываний) к сложным. На этом пути становится возможным учет и предпосылок вопросов: в этом случае вводится понятие условного вопроса, в котором предпосылка составляет *антецедент, а сам вопрос — консеквент. Поскольку* ни простой, ни сложный вопрос не являются высказываниями, в интеррогативной логике отрицание, конъюнкция, дизъюнкция и импликация оказываются лишь аналогами соответствующих пропозициональных операций.

Значения формул интеррогативной логики составляют оценки «корректно — некорректно», причем корректность (правильность) непосредственно связывается с существованием истинного ответа на вопрос. В логике вопросов строится аппарат «сохранения корректности», хотя, как отмечается в статье Е. К. Войшвилло и Ю. А. Петрова, систему соответствующих постулатов сформулировать довольно трудно, и предложенная ими аксиоматика не претендует на полноту — оставляет нерешенной проблему, всякий ли корректный вопрос может быть получен с ее помощью[41].

В педагогической прагматике интеррогативного языка и соответствующей логики особое внимание обращается на непрямые и сложные вопросы. Отмечается дидактическая трудность вопросительных предложений, начинающихся со слова *почему*. Их предлагается сводить к форме: «Какие основания (логические

---

[41] *Е. К. Войшвилло, Ю. А. Петров.* Язык и логика вопросов // Логика и методология научного познания. [М.], Изд-во МГУ, 1974, с. 156.

или эмпирические) имеет предложение $p$?», более оправданной в дидактическом плане.

***Практическая методология*** Ключевым для понимания основных установок работ последних лет жизни Ю. А. Петрова был тезис, во многом означавший пересмотр его прежних взглядов на логику и как бы ставивший под сомнение ценность многих собственных его работ. В книге 2000 года тезис этот сформулирован следующим образом: «Математическая логика — это разнообразные исчисления, одно из которых (логика предикатов) находит очень незначительное применение к правилам мышления. Аристотелевская логика — тоже искусственное построение (в основном — силлогистика), которое тоже весьма незначительно относится к мышлению»[42]. В беседах со мной Ю. А. не раз возвращался к этой мысли и говорил, что понимает теперь декана философского факультета времен его молодости — В. С. Молодцова, скептически относившегося к логике. Несостоятельность этого взгляда видна уже из того, что психологи, изучая развитие мышления, используют в своих полевых исследованиях силлогизмы — проверяют, как люди в своем мышлении соблюдают соответствующие правила[43]

«Практическая методология» была задумана для того, чтобы показать, *что* из логики сохраняет значение для реального мышления и для логичного написания научных работ. Между прочим, значение методики составления такого рода текстов Ю. А. осознал во время своей стажировки в США, где с удивлением обнаружил, что по данному вопросу там имеется значительная литература.

Положения «практической методологии» Ю. А. Петрова заслуживают того, чтобы хотя бы кратко о них сказать. Главное внимание уделяется введению, определению и исключению научных терминов. Вводя термин, надо предварительно уточнить задачу, ради которой это делается. Не следует вводить термины, содержание которых не требуется в данной работе. Определяя же термин, нет необходимости ставить вопрос, известен или нет его смысл реципиентам (восприимникам данного текста), — нельзя заранее знать, кому новый термин уже знаком, а кому нет.

Следует различать реальные и номинальные определения и не подменять подлинные определения (их Ю. А. называет вербальными) переименованиями терминов — определениями номинальными. Использовать надо только такие определения,

---

[42] *Ю. А. Петров, А. А. Захаров.* Практическая методология, с 113.

[43] См., например: *А. Р. Лурия.* Об историческом развитии познавательных процессов. Экспериментально-психологическое исследование. М., «Наука», 1974.

каждое из которых необходимо, а их вместе достаточно для решения задач, которые поставил автор. Если имеется возможность выбора разных определений одного и того же объекта, то предпочтение надо отдавать познавательно более простому. Вербальное определение не должно быть самопротиворечивым, и в контексте других определений и суждений не должно влечь противоречия.

Очень важно не смешивать определения с обычными суждениями, а также отличать осмысленные определения (и суждения) от бессмысленных. В другой своей работе[44] Ю. А. приводит примеры бессмысленных определений. В их числе, например, такое: «понимание — это реконструкция личностных измерений объективации деятельности» (оно фигурирует в одной из статей, опубликованных в «Вестнике Московского университета»); отсутствие смысла вытекает из того, что непонятно ни «личностное измерение», ни «объективация деятельности», ни их «реконструкция» — эти понятия автор этого «определения» не разъясняет.

Реальные (вербальные) определения должны дополняться остенсивными, а явные определения согласовываться с определениями контекстуальными. Согласование это производится путем подстановки в контекст термина его вербального определения (определяющего). Вводимый термин, далее, должен обладать свойством исключаемости; исключение термина производится путем перехода от него к менее общим терминам или даже единичным предметам.

Поскольку термины бывают исходными и производными, надо уметь выбирать первые и определять с их помощью вторые. «Метод принятия исходных терминов» должен состоять в том, что показывается: данный термин необходим для решения основной задачи данной теории (работы) и имеются средства исследования объекта, обозначенного этим термином.

В «практической методологии» находят свое место и интеррогативные методы, и вопросы обоснования суждений, — обо всем этом уже говорилось выше. Здесь надо только добавить, что наряду с дедуктивными методами Ю. А. говорит и об индукции, и о методах Д. С. Милля, а также об аналогии. Предметом рассмотрения в «практической методологии» являются и «непозволительные приемы» обоснования истинности или правдоподобности. Здесь Ю. А. вполне следует многовековой традиции философской логики.

Весьма практический характер носят рекомендации Ю. А., касающиеся того, как надо строить научную работу (текст): по-

---

[44] *Ю. А. Петров, Э. З. Феизов.* Введение в методологию. Чебоксары, 2000 (Издание чувашского государственного университета).

дробно объясняется, как надлежит составлять план работы, формулировать ее задачи (цель), систематизировать разделы текста и распределять по ним имеющийся материал, наконец, подводить итог всему исследованию.

Изложение «практической методологии», к сожалению, страдает от некоторой неряшливости в сочетании с излишней категоричностью формулировок, а также от пристрастия Ю. А. к введению непривычной терминологии. Так, он утверждает, будто научная работа — это всего-навсего «совокупность двух определений — вербального и контекстуального»[45]; от экспликации понятий, то есть уточнения их строгими методами, он требует равнообъемности экспликанда (того, что уточняется) и экспликата (уточняющего понятия)[46], что является слишком сильным требованием. Для различения теорий, интерпретируемых на материальных и на абстрактных объектах, он вводит названия «гносеологический язык» и «негносеологический язык»[47], искусственность которых очевидна.

«Практическая методология» Ю. А. Петрова нуждается в поправках и уточнениях, которые его соавторы, к сожалению, сделать не смогли.

***Последние мысли. В чем прав и в чем неправ Ю. А. Петров.*** В известном смысле итоговой является посмертно публикуемая статья Ю. А. «Не опровергать неопровержимое»[48]. В ней формулируются три методологических принципа, которые Ю. А. считал самыми важными. Это принцип идеализации, согласно которому «все, что вербально определено, является идеализированным, так как дано не в виде объекта „самого по себе“, со всеми имеющимися у него признаками, а только со специфическими признаками, порождающими сущность этого объекта в отвлечении от всех несущественных признаков». Другим принципом является принцип относительности истинности по отношению к принятым идеализациям, в свете которого «две несовместимые теории могут быть истинны, но применительно к различным идеализациям». Третий принцип — это принцип плюрализма истинности, согласно которому существуют различные виды истины и в силу которого две «несовместимые теории могут быть обе истинны, если они

[45] *Ю. А. Петров, Э. З. Феизов.* Указ. соч., с. 21.

[46] *Ю. А. Петров, А. А. Захаров.* Практическая методология. Озерск, 2001, с. 44.

[47] *Там же*, с. 134.

[48] *Ю. А. Петров*: Не опровергать неопровержимое. Из архива профессора Ю. А. Петрова. Публикация Б. В. Бирюкова и И. С. Верстина. — печатается в «Вестнике Московского ун-та». Серия 7: ФилософияП..

фактуально истинны. Если же они истинны логически, то этого не может быть». К этим принципам следует добавить требование Ю. А. к сравнению теорий: оно должно быть поаспектным, то есть учитывающим отдельно семиотические — синтаксические, семантические и прагматические свойства теорий, их логические соотношения, а также (и особенно) их гносеологические предпосылки.

К этим принципам Ю. А. добавляет «прототеретические принципы», к которым он относит принципы причинности, дуализма (волны и частицы в квантовой теории), дополнительности, неопределенности и соответствия. Все они рассматриваются применительно к физике, причем утверждается, что в этой науке следует различать причинность как «материальное» отношение и как отношение «номологическое» (то есть касающееся законов физики). При этом категорически утверждается, что «номологическую причинность ни в коем случае нельзя трактовать как объективную причинность, так как связи физических отношений, устанавливаемые на основе законов, не обязаны быть объективными отношениями, устанавливаемыми с помощью физических взаимодействий материальных физических объектов» [49]. Вряд ли физики согласятся с петровской трактовкой «номологичности», лишающей физические законы объективного содержания.

Ю. А. Петров до конца дней оставался в плену ряда положений «диамата». Он писал, что материалистическая диалектика является важнейшим философским основанием научных теорий, рассуждал о «критерии практики» [50] и основном вопросе философии («что первично, а что вторично») [51]. В «Комментариях публикаторов» мы писали о том, что «принципы Петрова» (так А. А. Захаров назвал главные положения методологии Юрия Александровича) имеют одно существенное ограничение — даже в рамках строгой науки. Они применимы только к «жестким» объектам, сохраняющимся неизменными по крайней мере пока мы о них рассуждаем. Это положение всегда подчеркивала учитель Ю. А. — Софья Александровна Яновская. Но, универсализируя свой подход, Юрий Александрович забыл этот ее завет. И те направления в логике, в рамках которых предпринимались попытки отобразить феномены «нежесткости» лингво-логичес-

---

[49] *Ю. А. Петров, Э. З. Феизов.* Гносеологический анализ физических принципов и протопринципов. Чебоксары, 2000 (издание Чебоксарского государственного университета), с. 14, 20.

[50] Ср. *Ю. А. Петров.* Теория познания. Научно-практическое значение, М., «Мысль», 1988, с. 136.

[51] *Ю. А. Петров, Э. З. Феизов.* Введение в методологию, с. 12.

ких конструкций, не встречали с его стороны понимания. Так, он отнесся критически к книге И. С. Верстина[52], в которой рассматривались методологические аспекты теории «расплывчатых множеств» Лотфи Заде, начавшей стремительное развитие со второй половины 60-х годов.

Наука, особенно квантовая физика, постоянно имеет дело с объектами, к которым «принципы Петрова» по сути дела не применимы, и никакие ссылки на «протопринципы» здесь не помогают. Но Юрий Александрович упорно придерживался «стандартного» подхода к понятиям — в духе Е. К. Войшвилло, — игнорируя то новое, что вносит в них «искусственный интеллект», — направление, в котором были представлены и фреймовые, и решеточные[53] понятийные конструкции.

Однако главное возражение против «универсализации» Юрием Александровичем своих принципов состоит в том, что вне его поля зрения оказывается *духовная компонента* мира. В частности, методология Ю. А. Петрова оставляет открытым вопрос о познании субъективной реальности. Она позволяет «конструктивизировать» лишь очень узкий диапазон сознания, связанный с научным мышлением. Методология Юрия Александровича совершенно беспомощна перед лицом экзистенциальных состояний человека — его страданий, тревог, чувству удовольствия, верой, надеждой, волей, чувством справедливости и совестью, эстетическими переживаниями и пр.

***Сотрудничество двух друзей.*** На протяжении десятилетий нас с Юрой Петровым связывали крепкие узы дружбы. Мы дружили семьями. И хотя наши взгляды на логику и методологию науки не всегда совпадали, это не отражалось на наших отношениях.

У нас не так много совместных работ. В их числе — упомянутые выше обзоры Одесского симпозиума 1966 года, статья о характерных чертах и тенденциях развития современной формальной логики, рассматриваемых в контексте информатики, да раздел о философии математики в коллективном труде по философским

[52] *И. С. Верстин.* Философские проблемы кибернетики: диалектические и гносеологические аспекты теории нечетких множеств. [М.], Изд-во МГУ, 1987. В основе книги лежала кандидатская диссертация по философии, написанная Игорем Семеновичем под моим научным руководством и защищенная в Московском институте народного хозяйства им. Г. В. Плеханова.

[53] Имеется ввиду решетка (структура) в алгебраическом смысле — как частично упорядоченное множество, для любых двух элементов которого имеется точная нижняя и точная верхняя грани. Теория понятий, основанная на использовании понятия решетки, была предложена группой немецких ученых; в нашей стране подобный подход развивается в школе В. К. Финна.

проблемам естествознания[54]. При написании последних двух работ у нас возникали разногласия, которые были разрешались своеобразно: в первой статье Ю. А. просто согласился с той частью текста, которая принадлежала мне, сказав, что он не совсем понимает, что хочет сказать его соавтор, но не возражает против его мыслей; во втором же случае я поступил аналогично — согласился с той интерпретацией проблемы, которую предлагал Юра.

Мы поддерживали друг друга как могли. Перейдя в качестве старшего научного сотрудника в НСК, возглавлявшийся академиком А. И. Бергом, и став заместителем председателя Секции философских вопросов кибернетики, я ввел Ю. А. Петрова в состав Секции. Публикация его кандидатской диссертации в виде монографии, предлагаемой ниже вниманию читателя, — результат моей инициативы: я включил ее план публикаций Секции в издательстве «Наука». Со своей стороны Ю. А. Петров, будучи ученым секретарем экспертной комиссии ВАКа по философии, сумел провести через это бюрократическое учреждение моей докторской диссертации в рекордный срок — два месяца и один день!

У меня сохранилась копия одного документа, свидетельствующего о единстве наших взглядов. Это составленное Б. В. Бирюковым и Ю. А. Петровым, подписанное ими и адресованное в издательство «Прогресс» (в ноябре 1973 г.) предложение об издании главной книги известного английского философа К. Поппера. От имени Секции философских вопросов кибернетики мы писали директору издательства Ю. В. Торсуеву о настоятельной необходимости перевода книги Поппера «Логика научного исследования» (вышла в Лондоне на английском языке еще в 1959 г.).

Книга К. Поппера, писали мы, посвящена анализу методов научного познания, главным образом методов эмпирических наук — дедуктивных и индуктивных, научному экспериментированию, подтверждению и «демаркации» теорий, вероятностным средствам исследования; большое внимание в книге уделяется также методам аксиоматизации, формализации теорий, экспликации понятий. Мы предлагали в русском издании назвать книгу «Методология научного познания», так как о логике в собственном смысле этого слова (то есть о логических исчислениях), а также о научном открытии как творческой деятельности у Поппера речь не идет.

Мы писали, что книга Поппера получила широкую известность в научном мире. В ней глубоко анализируется категория

[54] *Б. В. Бирюков, Ю. А. Петров.* Философские проблемы обоснования математики // Философские проблемы естествознания. М., 1985; *они же.* Современная формальная логика и информатика // Вопросы философии, 1986, № 4.

вероятности. Оригинальность попперовского подхода состоит в том, что автор раскрывает характер тех процессов в природе и в познании, моделями которых являются различные теории вероятностей, от интуитивно-содержательных до формальных. Кроме того английский философ рассматривает ряд логико-методологических категорий, которым в нашей литературе уделяется недостаточное внимание, — объяснение, предсказание, подтверждаемость, фальсифицируемость, измеримость, теоретическая простота, физическая необходимость и диспозиционная предикация, умственный эксперимент и пр.

Нами особо подчеркивалось, что английский автор показывает, как научные методы и категории применяются на практике. Так, он не просто разъясняет, в чем состоит формализация теории, но выявляет эвристические соображения, которыми руководствуются при создании формальных конструкций; например, он показывает, как теория вероятностей, будучи аксиоматической системой на формальном уровне, в физическом знании, например в квантовой механике, выступает как содержательная теория.

Конечно, продолжали мы, русскому изданию труда Поппера следует предпослать предисловие, в котором следует показать как достоинства, так и недостатки книги, к которым, в частности, мы относили излишний акцент на философско-лингвистическом анализе; впрочем, добавляли мы, главные решения Поппера лежат не в плоскости языка, а в плоскости гносеологии (называемой в книге эпистемологией).

Читатель, несомненно, уже заметил, что в нашей оценке книги английского философа присутствовали те идеи, которые развивал Ю. А. К сожалению, наши рекомендации — равно как и обещание содействовать редактированию книги и составлению ее научного аппарата[55] — в издательстве «Прогресс» оставили без внимания. Через десятилетие в отечественном философском сообществе идеологическая атмосфера несколько смягчилась, а, главное, нашлись более «пробивные» силы, чем мы с Юрой Петровым, и в результате их усилий в начале 80-х годов избранные методологические работы К. Поппера, в том числе книга, о которой шла речь в нашей заявке, появились в русском издании[56].

В середине 70=х годов по инициативе бывшего моего сокурсника по философскому факультету — Виктора (Авигдора)

---

[55] Мы сообщали, что председатель Секции планирования эксперимента Научного совета по кибернетике — профессор В. В. Налимов готов взять на себя отбор дополнительных текстов Поппера, которые целесообразно включить в русское издание, и принять участие в написании предисловия к книге.

[56] 34. *К Поппер.* Логика и рост научного знания. М., «Прогресс», 1983.

Григорьевича Фарбера было задумано издание труда на тему «логика и педагогика». Я принял участие в составлении и редактировании этой коллективной работы. И, конечно, привлек в качестве автора Юрия Александровича. Помимо совместной с А. А. Столяром статьи, о которой уже шла речь, Ю. А. подготовил статью о логической функции артиклей в английском языке[57]. Я привлек Юру Петрова также для того, чтобы привести в должный порядок намечавшуюся для сборника статью о применении в программированном обучении (тогда очень модном) аппарата математической логики и теории автоматов. Статья на тему педагогического приложения аппарата теории конечных автоматов была задумана, когда составлялся план сборника. Ее заказали одному из специалистов киевского Института кибернетики, но полученный текст оказался недостаточно внятным с точки зрения математико-логической и не отвечающим дидактическим установкам намеченного труда. Для «доводки» статьи был приглашен Л. М. Фридман, занимавшийся вопросами применения логики в дидактике. Но статья, с моей точки зрения, все не получалась. Лишь соавторство Ю. А. придало ей тот логически безупречный вид, который теперь можно найти сборнике «Логика и проблемы обучения»[58].

В начале 90-х годов, после конца советской эпохи, по моей инициативе и при организационном участии И. С. Верстина и Л. А. Коробениковой был создан гуманитарный факультет в так называемом «Российском открытом университете», возглавляемом профессором Б. М. Бим-Бадом. В качестве преподавателей данного факультета РОУ я пригласил выдающихся специалистов и в их числе Ю. А. Петрова. Упор в РОУ делался на заочном образовании, отсюда и ориентация на выпуск литературы, рассчитанной на дистантное обучение. В число первых руководств, которые предполагалось издать для слушателей нашего факультета, я включил книгу Ю. А. Петрова «Практическая методология». Ее рукопись была мною отредактирована, и я уже держал корректуры будущей книги — Юра с осени 1993 г. был уже серьезно болен и делать этого не мог.

Книга «Практическая методология» не увидела света. На рукопись Ю. А. отрицательный отзыв дал А. Г. Барабашев. В своей записке, направленной в ректорат и редакционно-издательский отдел РОУ (датирована 28 марта 1994 г.), я отмел все критиче-

[57] *Ю. А. Петров*. Применение логики к изучению функций артиклей в английском языке // Логика и проблемы обучения.

[58] *Ю. А. Петров, Л. М. Фридман*. О некоторых применениях математической логики и теории автоматов к задачам программированного обучения // Там же.

ские замечания рецензента. Книга Ю. А., писал я, прекрасное пособие для очников и заочников, она учит тому, как надо задавать вопросы и строить ответы, вводить и определять понятия, развивать научную аргументацию. «Рецензия Барабашева, — продолжал я, — плод недоразумения. Рецензент не учел замысла книги — быть практической методологией, а увидел в ней сочинение по истории и философии математики, каковой книга Петрова никак не является. Ни одно возражение рецензента не заслуживает внимания». А. Г. Барабашев смотрел на текст Ю. А. глазами специалиста по «нефундаменталистской» философии математики, и естественно, что в «Практическая методология» он не нашел ничего себе близкого.

В конце концов книгу Ю. А. Петрова *«замотали»* в издательском отделе РОУ, и она так и не была издана. И я думаю, что рецензия *А. Г. Барабашева*, бывшего декана философского факультета «Российского открытого университета» здесь особой роли не сыграла: просто в заведении Бим-Бада царила борьба группировок и неразбериха. Конечно, жаль труда, потраченного на редактирование рукописи Ю. А.: то, что под тем же названием опубликовано в Озерске, сохраняет все огрехи и неточности, которые в исходном тексте были мною устранены.

Гуманитарный факультет не прижился в РОУ, и я перевел его в Международный Славянский университет, где до января 2000 года состоял его деканом. Университет издавал свой Вестник, и в первых пяти его выпусках я был заместителем главного редактора. Четвертый выпуск был юбилейным — он был посвящен пятилетию факультета, и в этом выпуске читатель может найти статью Ю. А. о научно-практической методологии[59].

***Черты личности. Последние годы.*** У Ю. А. Петрова было мало учеников: слишком строгие требования предъявлял он к аспирантам. Если бы он был членом кафедры логики, то, думается мне, у него не только нашлись бы ученики, но возникла бы научная школа Петрова. Но выпускники кафедры диалектического материализма («методологии и философии науки», «истории социально-политических учений», как стали называться в постсоветское время кафедры, на которые разделилась кафедры «диамата — истмата»), членом которой он был, не могли подняться до уровня тех требований, которые Юра Петров предъявлял к научной работе. Из числа его коллег по кафедре я должен выделить Игоря

---

[59] *Ю. А. Петров.* Практическая методология науки // Вестник Международного Славянского ун-та. Вып. 4. М., 1998.

Семеновича Верстина, который многому научился у Ю.А.Сам Петров считал Верстина своим учеником, а это много значит.

Следует сказать, что высокую требовательность Ю. А. Петров предъявлял прежде всего к самому себе. Он не только стремился в своих работах к точности формулировок (как он ее понимал), но и отличался чрезвычайной пунктуальностью в выполнении всех своих обязательств. Он *никогда*не опаздывал — ни на лекции, ни на научные заседания. Будучи много лет ученым секретарем экспертной комиссии ВАКа, он требовал дисциплины от ее членов и за большие опоздания на заседания комиссии наказывал экспертов рублем (их работа оплачивалась); излишне, пожалуй, говорить, что в ВАКе он жестко противостоял любой халтуре. Избранный в своем доме председателем правления жилищного кооператива, он навел порядок, который до него трудно было представить. Он был мастером на все руки, и свою автомашину — *«Москвич»* одной из первых моделей — ремонтировал сам. Став автомобилистом, он неукоснительно следовал правилам дорожного движения. Он даже разработал нечто вроде синтаксиса языка дорожных знаков. Это следование правилам его и подводило, когда он выезжал в Москву. Помнится, он рассказывал, что никак не мог повернуть с Ленинского проспекта на Садовое кольцо по направлению к Крымскому мосту. Точно следуя расставленным дорожным указателям, он несколько раз крутился вокруг Октябрьской (теперь Калужской) площади, пока не сообразил, что знаки могут противоречить друг другу и что подчас приходится их нарушать, чтобы проехать куда надо.

Более семи лет он был в почти полном научном одиночестве, и хотя числился профессором-консультантом, никаких поручений факультет ему, к сожалению, не давал. Конечно, о нем помнили, его навещали, но сам он был ограничен стенами своей квартиры. Ему негде было печатать свои работы. Только двое из его коллег, причем иногородних, могли здесь ему помочь — А. А. Захаров в г. Озерске Челябинской области и Э. З. Феизов в Чебоксарах. Они усвоили методологические установки Ю. А. Петрова, могли их излагать, и отсюда серия совместных работ Ю. А. с Захаровым и с Феизовым. Но наиболее тесными были научные взаимоотношения Петрова с его младшим коллегой доцентом И. С. Верстиным.

Юрию Александровичу очень хотелось передать кому-то свой богатый научный и педагогический опыт, и здесь на первом месте был Игорь Семенович. В последние годы Петров почти ежедневно созванивался с Верстиным, предлагал свои советы относительно написания последним докторской диссертации. Юра набросал для И. С., читавшего лекции в МГУ, тезисы спецкурса по методологии теоретического познания, интересовался тем, сколь успешным является чтение Верстиным лекций по теории познания на социологическом факультете и когда лектор собирается включить в свой курс материал по «практической гносеологии», отражающий его, Петрова, идеи.

Упомянутая выше статья Ю. А. Петрова «Не опровергать неопровержимое» была во многом написана как пособие для лекций Верстина, и то, как ее идеи были включены в излагавшийся Игорем Семеновичем материал, было одобрено Петровым. Как я уже говорил, это была последняя научная работа Юры. Она долго лежала в портфеле журнала, и это возмущало Ю. А. «Свинопасы, — говорил он, — аспирантские опусы публикуют, а работу профессора нет».

Юра сидел на диване в комнатке хрущевской пятиэтажки и часами видел в окне одну и ту же картину — березки на участке около дома. Лишь летом, в хорошую погоду, он мог без посторонней помощи спуститься со своего четвертого этажа и немного посидеть на лавочке. То, что я редко навещал его, лежит на моей совести... .

Крах советской системы не вызвал у бывшего пограничника никаких ностальгических чувств. Он страстно ненавидел коммунистов, и говоря о них, волновался. В жизни, видимо, он натерпелся от них достаточно.

Грустно было наблюдать, как угасала острота мысли у человека, постоянно стремившегося к точности формулировок. Он с трудом читал печатный текст, его научный кругозор сузился, и он мог, рассматривая вопрос об истинности суждения, связывать ее с приписыванием предиката субъекту, то есть вернуться к форме «*S* есть *P*», как бы забыв про подход математической логики. После случившегося с ним инсульта он раздал своим коллегам свою домашнюю научную библиотеку[60], и потом это затрудняло ему составление работ, которые он считал главным итогом своего научного творчества. Его часто посещали мысли о смерти, и он нередко говорил о том, что желал бы эвтаназии.

В последние месяцы жизни Юра Петров замкнулся в себе: в своей записной книжке он одно за другим черным фломастером вымарывал имена своих бывших коллег, которые, как он считал, его забыли — этого избежал, пожалуй, только И. С. Верстин, часто навещавший Юрия Александровича. Здесь Юра был несправедлив: руководство философского факультета и кафедры,

[60] Из нее я не взял ни одной книги: считал это как бы признанием того, что Юры Петрова как ученого не существует.

членом которой он продолжал числиться, регулярно навещали его, может быть не так часто, как ему хотелось; ряд друзей также можно было встретить в его доме — в компании дочери и сына — на дне его рождения, на Новый год, на майские и ноябрьские праздники. Иные его коллеги звонили ему, но сам он, затая обиду, телефонную инициативу проявлял только в отношении декана, заведующего своей кафедрой, заместителя редактора философской серии университетского журнала и очень небольшого числа своих коллег.

Почти до последних дней жизни он остро переживал ситуацию *в нашем философском сообществе*. Как вспоминает М. С. Верстин, однажды, пораженный нелепостью, обнаруженной им в «Вестнике Московского университета», Ю. А. написал письмо ректору МГУ, где сетовал на «полную методологическую безграмотность отечественных ученых» и предлагал закрыть философский факультет. Правда, когда Юра не горячился, он с удовлетворением вспоминал те сорок лет, которые связывали его с alma mater, отдавая отчет, что то, кем он стал, — без МГУ было бы невозможно.

Скончался Юра Петров 17 августа 2001 года. Проводить его в последний путь пришли его коллеги по философскому факультету, в частности бывшие деканы А. Д. Косичев, С. Т. Мелюхин, А. В. Панин и небольшое число друзей и коллег, в том числе И. С. Верстин. Время было летнее, многих коллег Ю. А. не было в городе. Я тоже был среди тех, кто отдал последний долг Юрию Александровичу, и на гражданской панихиде, вспоминает И. С. Верстин, сказал: «Все мы смертны, и большинство из нас будет забыто, но память о Юре Петрове останется, так как за его идеей „практической логики" — будущее».

Ю. А. Петров был убежденным атеистом, и его не отпели в церкви. Он был кремирован, и урна с его прахом захоронена на Николо-Архангельском кладбище. Помочь его мятущейся душе мы можем только в редкие дни, в частности перед Великим постом, в которые Православная церковь разрешает поминать неверующих и иноверцев.

Улица Главмосстроя (только при советской власти можно было дать такое нелепое название) в городе Солнцеве — теперь районе Москвы, — на которой стоит дом, где жил Юра Петров, навсегда будет для нашей семьи связана с его именем.

*Б. В. Бирюков.*
*Июль–август* 2004 *г.*

# ОТ АВТОРА

*Работа над этой книгой проводилась под руководством ныне покойной профессора С. А. Яновской. С глубокой признательностью автор вспоминает помощь Софьи Александровны, оказавшей существенное влияние и на замысел данного труда в целом, и на важнейшие методологические идеи, реализованные в нем. Многим он считает себя обязанным также прослушанным им лекционным курсам профессоров и преподавателей кафедры математической логики механико-математического факультета — Андрея Андреевича Маркова, Николая Макарьевича Нагорного, Владимира Андреевича Успенского и Александра Владимировича Кузнецова. А. В. Кузнецов оказал большую помощь автору своими полезными рекомендациями. Автор искренне благодарит также доцента кафедры логики философского факультета Евгения Казимировича Войшвилло, чьи советы оказали заметное влияние на работу автора над данной проблематикой.*

*Автор с благодарностью вспоминает внимание к его рукописи, проявленное руководством секции философских вопросов кибернетики Научного совета по кибернетике и Научного совета по философским проблемам современного естествознания при Президиуме АН СССР (председатель секции — доктор философских наук А. Г. Спиркин), рекомендовавшей ее к печати. Автор благодарит Ю. А. Гастева за многочисленные предложения в процессе редактирования книги, Б. В. Бирюкова и Н. М. Нагорного — за ряд ценных советов, способствовавших ее улучшению.*

*Автор будет благодарен всем специалистам, которые не сочтут для себя за труд сообщить ему о замеченных ими недостатках.*

ВВЕДЕНИЕ

# АБСТРАКЦИИ ОСУЩЕСТВИМОСТИ И КИБЕРНЕТИКА

Логический анализ абстракций осуществимости и бесконечности издавна являлся неотъемлемой частью философского и логического обоснования математики. В настоящее время им все более и более интересуются науки, в которых математические модели приобретают весьма существенное значение. Особое значение этот анализ приобретает для кибернетики, в которой настолько переплетено использование математических и технических моделей, что это нередко ведет к различного рода недоразумениям.

Основной задачей логического анализа является разрешение логических трудностей, возникающих в процессе использования абстракций осуществимости и бесконечности. Следует заметить, что логический анализ всегда находился и находится во взаимосвязи с философским анализом этих абстракций. Последний обращает особое внимание на гносеологические аспекты логических трудностей.

С философской точки зрения различные понятия об осуществимости абстрактных объектов выступают как различные смыслы категории возможного применительно к идеализированным абстрактным объектам (по поводу понятий «абстракция», «абстрактный объект», «идеализация» см., например, [4]).

В настоящее время многие науки требуют довольно четкого выяснения смысла терминов «возможное» и «невозможное». Одним из методов уточнения смысла этих терминов является такое описание их содержания, которое бы раскрывалось через более или менее уточненные понятия осуществимости. Можно, например, сколько угодно дискутировать о «возможном» и «невозможном» в кибернетике и фактически нисколько не продвинуться в решении вопроса, если прежде всего не уточнить, что такое «возможное» (или осуществимое) и что такое «невозможное» (или неосуществимое) применительно к тем или иным объектам, в том числе и абстрактным объектам. Когда, например, кибернетика говорит об осуществимости (или возможности) моделирования тех или иных функций (функций жизни, мышления, функций экономических, социальных и т. п. систем), то следует очень внимательно относиться к тому, в каком смысле понимается термин «осуществимость» (или «возможность»).

В предлагаемой читателю книге рассматриваются три понятия осуществимости. Этими понятиями являются абстракции «абсолютной», «потенциальной» и «фактической» осуществимости.

Обратим внимание читателя на то, что все три выше перечисленные понятия идеализированно отображают реальную физическую осуществимость, отвлекаются от каких-то факторов реальной осуществимости, идеализируют другие факторы, вводят определенные упрощения и огрубления. Поэтому, если говорится об осуществимости на математической модели каких-либо функций мозга (например, описываемых с помощью «формальной нервной сети»), то отсюда еще не следует осуществимость этих функций на технической модели, предполагающей уже некоторый вид реальной (физической) осуществимости. Этот вид реальной осуществимости, конечно, будет отличен от реальной осуществимости, основанной на таком физическом субстрате, каким является мозг; здесь возникают свои специфические проблемы, которых мы касаться не будем (они достаточно подробно обсуждаются в сборнике «Кибернетика, мышление, жизнь», М., изд-во «Мысль», 1964).

В нашу задачу входит рассмотрение тех абстракций осуществимости, которые связаны с математическим моделированием, а также рассмотрение их отношения к реальной (практической) осуществимости. С этой точки зрения может показаться странным термин «фактическая» осуществимость, который, как мы сказали, вовсе не означает реальную осуществимость. По этому поводу можно сказать лишь то, что этот термин уже встречался в некоторых работах, а более удачного термина нам подобрать не удалось.

Математические модели в кибернетике имеют весьма существенное значение. При их построении вполне естественно стремление использовать по возможности более слабые абстракции осуществимости, которые не столь далеко отстоят от реальной осуществимости, как это имеет место по отношению к сильным абстракциям осуществимости.

Наиболее сильной в этом смысле из рассматриваемых абстракций осуществимости является абстракция «абсолютной» осуществимости. Такое название, опять-таки освященное *литературной традицией*, связано с тем, что в этой абстракции идеализация осуществимости доведена, пожалуй, до крайности, до «абсолюта».

Самой же слабой, в упомянутом нами смысле, абстракцией осуществимости является абстракция «фактической» осуществимости.

Было бы преждевременно утверждать, что для построения математических моделей (в том числе и кибернетических) абстракция «фактической» осуществимости нашла значительное применение. Однако работы в этом направлении ведутся как у нас, так и за рубежом. Примером использования этой абстракции в области теоретической кибернетики служит работа В. А. Козмидиади [21].

Наибольшее применение, в частности в кибернетике, находит абстракция потенциальной осуществимости. Так, эта абстракция лежит в основаниях таких теорий, как теория алгорифмов, теория абстрактных автоматов, теория булевых алгебр и т. п., составляющих теоретический фундамент кибернетики.

Одна из задач книги состоит в том, чтобы показать, что с абстракциями осуществимости очень тесно связаны абстракции бесконечности. В книге рассматриваются три рода абстракции бесконечности: 1) так называемая абстракция «актуальной» бесконечности, 2) абстракция «потенциальной» бесконечности и 3) абстракция «фактической» бесконечности, которые соответственно связаны с абстракциями «абсолютной», «потенциальной» и «фактической» осуществимости.

Опять-таки обратим внимание на то, что все эти абстракции предполагают такую идеализацию, которая делает возможным лишь весьма приблизительное соотношение этих абстракций с реальной действительностью. И если потенциально бесконечные процессы, моделью которых служит абстракция потенциальной бесконечности, еще более или менее интуитивно представимы, то интуитивно представить себе объекты, моделями которых служат абстракции «актуальной» бесконечности или «фактической» бесконечности, весьма и весьма трудно. Однако это обстоятельство не снижает теоретико-познавательного значения этих абстракций. Современной теории познания хорошо известно, что отсутствие наглядной или интуитивно доступной интерпретации некоторых абстракций какой-либо теории не является препятствием для развития этой теории и не только не снижает, но зачастую даже повышает ее познавательную ценность.

Например, имеются два представления о бесконечном множестве: как о множестве, имеющем истинное подмножество, эквивалентное всему множеству, и как о множестве, возникающем в результате доведения некоторого бесконечного процесса «до конца».

Научные теории пользуются в настоящее время первым из упомянутых пониманий бесконечного множества, отбрасывая второе как логически самопротиворечивое, хотя и более интуитивно доступное.

Второе из упомянутых пониманий бесконечного множества господствовало более двух с половиной тысяч лет (вплоть до разработки теории множеств Г. Кантором) именно благодаря своей интуитивной доступности, а также в результате того, что первое понимание шло вразрез с интуитивными представлениями и на этом основании казалось парадоксальным (достаточно вспомнить «парадокс» Галилея и многие другие «парадоксы», разрешением которых занимался Б. Больцано [5]).

Еще более интуитивно малодоступной является абстракция «фактической» бесконечности—хотя бы потому, что к этому понятию мы мало привыкли, несмотря на то, что логически оно имеет такое же право на существование, как и другие понятия о бесконечном.

В самом деле, понятие актуально бесконечного множества вводится с помощью некоторого определения (как множества, содержащего эквивалентное себе истинное подмножество). Этим предложением можно пользоваться как постулатом некоторой теории при условии, что оно не вступает в противоречие с другими ее постулатами. Тогда та область, которая будет служить интерпретацией этой теории, и будет «актуально бесконечной» областью.

На аналогичных основаниях можно ввести и абстракцию «фактической» бесконечности. Для этого берется предложение, называемое аксиомой полной математической индукции, которое истинно на потенциально бесконечной области. Обозначим это предложение буквой $A$.

Символически предложение $A$ записывается следующим образом:

$$P(0)\,\&\,(P(n) \supset P(n')) \supset \forall n P(n),$$

где символ $P$ означает некоторое свойство, символ $0$ — исходный объект, символ $n$—произвольный объект, символ $'$ — операцию непосредственного следования, а символы $\&$, $\supset$, $\forall$ означают соответственно логические операторы «и», «если..., то», «все».

Возьмем теперь отрицание предложения $A$, обозначаемое как $\neg A$. После элементарных преобразований оно примет вид

$$P(0)\,\&\,(P(n) \supset P(n'))\,\&\exists n \neg P(n),$$

где символ $\exists$ означает логический оператор «существует», а символ $\neg$ — логическую операцию отрицания.

Возникает вопрос, как интуитивно представить ту область, на которой будет истинно предложение $\neg A$ и которую можно назвать «фактически» бесконечной. Термин «бесконечное» в применении к этой области столь же оправдан, сколь он оправдан в применении к области, удовлетворяющей предложению $A$, однако в предложении $\neg A$ содержится утверждение о существовании элемента $n$, не обладающего указанным свойством $P$, т. е. предложение $\exists n \neg P(n)$. Существование объекта $n$, не обладающего свойством $P$, в данном случае трудно представить именно потому, что в ситуациях, когда из того, что один объект обладает некоторым свойством, вытекает, что непосредственно следующий за ним объект обладает этим же свойством, мы привыкли мыслить по правилу полной математической индукции и заранее предрасположены считать предложение $A$ истинным, а предложение $\neg A$ — ложным.

Поэтому доводы против выполнимости $\neg A$ — причем на такой области, которая строится индуктивно из 0 посредством операции «$'$» (иначе можно привести тривиальные примеры вроде натурального ряда плюс еще «какой-то» элемент) — сами основаны (содержательно) на $A$. Они не могут служить аргументом против истинности $\neg A$, если не принимать $A$ заведомо истинным.

Конечно, если говорить о выполнимости $\neg A$ на какой-либо области, то сразу же возникает задача найти примеры, хотя бы приблизительно подтверждающие истинность предложения $\neg A$, интерпретируемого на этой области. Примеры такого рода будут приведены ниже.

Научные теории могут быть основаны как на допущении абстракции потенциальной бесконечности (наиболее хорошо представимой интуитивно), так и на допущении абстракции «актуальной» и на абстракции «фактической» бесконечности. Эти последние абстракции достаточно трудно «согласовать» с интуицией, что порождает немало трудностей, преодоление которых входит в логическую проблематику абстракций бесконечности и осуществимости. Рассмотрению этой проблематики в книге отводится значительное место.

Надо сказать, что вопрос о целесообразности использования той или иной абстракции бесконечности, а также характер этого использования зависят от характера конкретных задач. Хорошо известно огромное множество задач, в которых даже конечные объекты (отрезки пути, промежутки времени и т. п.) целесообразно рассматривать как актуально бесконечные множества. Зато, например, в теории алгорифмов подобное рассмотрение объектов, изучаемых этой теорией, просто недопустимо. Однако и в теории алгорифмов используется абстракция бесконечности, а именно абстракция потенциальной бесконечности, причем она играет в этой теории весьма специфическую роль. В частности, эта абстракция используется в случае отрицательного ответа на вопрос о применимости алгорифма к некоторому слову: если применение алгорифма к слову ведет к потенциально бесконечному процессу, то данный алгорифм к данному слову неприменим.

Кибернетика изучает сложные динамические системы, т. е. системы, находящиеся в состоянии движения (изменения). Отсюда следует, что одной из важных гносеологических и логических проблем кибернетики является проблема отображения движения, в первую очередь отображения движения с помощью математических моделей.

Подобного рода задача встречает немало трудностей даже тогда, когда она касается сравнительно простой формы движения — механического движения макрообъектов. Причина этих трудностей заключается в том, что мы не можем отобразить движения, не огрубив, не упростив, не расчленив, не идеализировав реальный процесс движения.

А специфика этого огрубления, упрощения, расчленения и идеализации в процессе построения математических моделей движения как раз и заключается в том, что она приводит к необходимости введения абстракций бесконечности.

В § 1 главы второй дается критическое рассмотрение современных взглядов на решение проблемы отображения движения, использующего различные абстракции бесконечности. Эти взгляды разделяются в основном представителями двух направлений, придерживающихся диаметрально противоположных точек зрения на допустимость абстракции актуальной бесконечности для отображения движения.

Представители одного из них (например, А. Грюнбаум) полагают, исходя из различных соображений, что абстракция актуальной бесконечности вполне пригодна для математического описания движения. Они даже полагают, что реальные пространство и время представляют бесконечные множества континуальной мощности, и считают, что их позиция дает решение всем трудностям отображения движения. Представители другого направления (например, Садео Ширайши) считают недопустимым описывать пространство и время с помощью абстракции актуальной бесконечности и предлагают свои, порой довольно оригинальные средства для описания этих объектов. Последнее особенно важно для теоретической кибернетики, так как она, как правило, исключает абстракцию актуальной бесконечности.

Представители каждого из указанных направлений считают, что только их способ описания движения позволяет абсолютно точно отобразить реальное движение и разрешить все трудности, связанные с этим отображением.

Нам представляется неправомерной уже сама претензия на абсолютно точное отображение движения, какие бы математические абстракции при этом ни использовались. Любые абстракции упрощают и огрубляют движение. Трудности отображения движения на самом деле всегда оказываются преодоленными не в абсолютном, а лишь в относительном смысле. Метафизический характер взглядов на отображение движения с помощью математических абстракций заключается не в том, что для этого отображения используются математические абстракции бесконечности, а в том, что подобные отображения рассматриваются как абсолютно точно описывающие движение и как полностью и окончательно преодолевающие все трудности, связанные с подобного рода отображением.

Несмотря на различие рассмотренных в книге концепций, касающихся проблемы преодоления трудностей математического отображения движения, эти концепции исходят из единого метода. Данный метод заключается в разрешении указанных трудностей на основе некоторой формализованной теории, которую представляют теорией, абсолютно точно отображающей действительность. Но, во-первых, такой теорией не является ни одна теория, ибо всякая теория идеализирует, упрощает, огрубляет, омертвляет действительное движение. Во-вторых, подобное разрешение данного рода трудностей фактически является отодвижением их в предпосылки (в исходные абстракции) той теории, с помощью которой эти трудности разрешаются. С последней теорией в свою очередь связаны всегда не меньшие трудности. В этом смысле неправомерно говорить и об «окончательном» разрешении трудностей отображения движения. Учитывая это, в § 2 гл. II предлагается иной метод подхода к разрешению трудностей отображения движения, использующего математические абстракции бесконечности.

Далее заметим, что всякая формальная теория, описывающая движение с помощью математических абстракций бесконечности и являющаяся логически непротиворечивой, по необходимости не описывает всех свойств движения. От некоторых из них она неизбежно вынуждена отвлекаться, так как их описание попросту выходит за пределы данной теории. Но именно это отвлечение и обеспечивает ее непротиворечивость! Противоречия возникают тогда, когда описание данных свойств производится на языке такой теории, которая в силу сущности принимаемых ею абстракций обязана отвлекаться от описания этих свойств. В нарушении этого требования как раз и лежит причина «непреодолимых трудностей» апорий, сформулированных Зеноном.

Однако свойства движения, не описываемые данной формализованной теорией, можно частично (но опять-таки не полностью) описать другой формализованной теорией или описать с помощью содержательных предложений, сформулированных на основе эмпирических данных.

Отображение движения представляет синтетическое знание о движении, которым являются как формальные теории, описывающие движение с помощью математических абстракций, так и содержательные теории, состоящие из эмпирических суждений. Никаких логических противоречий такое синтетическое отображение не содержит, ибо о логическом противоречии можно говорить лишь относительно данной формализованной теории, а синтетическое знание о движении не представляет одной формализованной теории. Аналогичная ситуация имеет место в науке о свойствах пространства — геометрии, которая представляет синтез многих формализованных теорий (даже и не совместных друг с другом) и их интерпретаций, но не является одной теорией. Говорить о непротиворечивости имеет смысл не по отношению к геометрии вообще, а, скажем, к геометрии Евклида или к геометрии Лобачевского и т. п. (известно, что две последние не совместны).

Таким образом, преодоление трудностей рассматриваемого нами отображения движения имеет относительный характер и осуществляется на основе диалектического синтеза самых различных теорий, каждая из которых сама по себе обязана быть логически непротиворечивой.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

# ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АБСТРАКЦИЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ И БЕСКОНЕЧНОСТИ

### § 1. Абстракции потенциальной осуществимости и потенциальной бесконечности

**Абстракция потенциальной осуществимости.** Смысл абстракции потенциальной осуществимости раскрывается через описание предположений, выражающих те идеализированные (по отношению к реальным процессам) условия, при которых процессы «построения» некоторых объектов можно мыслить осуществимыми, а сами объекты, возникающие в результате этих процессов,— существующими.

Эти предположения можно охарактеризовать следующим образом.

1. Предполагается дискретность процессов построения объектов. т. е. то, что эти процессы разложимы на отдельные, четко отличимые друг от друга шаги (хотя реальные процессы далеко не всегда таковы).

2. Предполагается наличие правил (методов, процедур, операций), по которым производится построение объектов на каждом шагу и осуществляется переход к следующему шагу построения. Иногда предполагается, что эти правила являются алгорифмами (в уточненном значении этого термина).

В действительности же мы далеко не всегда имеем перечень правил, по которым осуществляются реальные процессы (например, процессы управления, организации и т. п.).

3. Предполагается независимость процесса построения от материальных условий его осуществления в рамках осуществимости сколь угодно большого, но все же конечного числа шагов этого процесса. Эту независимость можно в равной мере понимать как в том смысле, что предполагается отвлечение от материальных условий построе-

ния, так и в том смысле, что материальные условия построения предполагаются всегда выполненными. Как раз последнее и имеется в виду при характеристике абстракции потенциальной осуществимости, даваемой Н. А. Шаниным применительно к процессу построения слов, или формул: «Абстракция потенциальной осуществимости, которая рассматривается как допустимая идеализация, позволяет понимать под «построением» не только практически выполнимое в данных материальных условиях построение, но и построение потенциально осуществимое, т. е. осуществимое в предположении, что после каждого шага процесса построения требуемого слова мы располагаем материальными возможностями для выполнения следующего шага» ([6], стр. 229).

Идеализированный характер последнего предположения не вызывает сомнений. Уже поэтому те теории, которые используют абстракцию потенциальной осуществимости, заведомо имеют дело с идеализированными абстрактными объектами.

**Абстракция потенциальной бесконечности.** Примерами потенциально осуществимых объектов являются конечные множества и бесконечные последовательности. Действительно, принимая во внимание вышеперечисленные идеализации осуществимости, произвольное конечное множество можно мыслить как потенциально осуществимый объект, если это множество представлять в виде списка его элементов. Разумеется, правила и материальные возможности составления такого списка относятся к числу предпосылок, которые предполагаются выполнимыми. На основе предпосылок об осуществимости, которые являются содержанием понятия о потенциальной осуществимости, можно также мыслить осуществимыми потенциально бесконечные процессы (но нельзя мыслить осуществимым завершение этих процессов).

Это позволяет нам говорить о приемлемости, или допустимости, понятия потенциальной бесконечности в тех теориях, которые принимают (допускают) абстракцию потенциальной осуществимости, ибо потенциально бесконечным и называют такой дискретный процесс, состоящий из отличимых друг от друга шагов, в котором за каждым шагом имеется следующий шаг. Очевидно, что данный процесс не имеет «конца», т. е. последнего шага, в этом смысле он и является бесконечным. Действительно, каков бы ни был шаг процесса, если имеется возможность всегда осуществить следующий шаг независимо от материальных возможностей, то — рано или поздно — будет превзойдено любое, заранее установленное число шагов. В этом смысле данное построение является бесконечным, не имеющим заключительного шага.

Примером реализации понятия потенциальной бесконечности может служить бесконечная последовательность натуральных чисел 0, 1, 2,..., $n$,..., получаемая посредством последовательного прибавления единицы к числу, полученному на предыдущем шагу построения, причем исходным числом является 0.

Абстракция потенциальной бесконечности не дает оснований говорить о возможности осуществления всех шагов произвольного процесса построения. Если эти процессы конечны, то данная абстракция позволяет рассматривать все шаги подобных процессов осуществимыми. Но если процесс построения бесконечен, то этого утверждать нельзя. Подобное утверждение заведомо будет противоречивым, ибо построение, в котором произвольный шаг имеет последующий, не может иметь последнего шага.

Очевидно, что абстракции потенциальной осуществимости и потенциальной бесконечности сильно идеализируют реальные процессы. Однако результаты теорий, исходящих из абстракции потенциальной осуществимости, успешно используются при решении практических задач. Последнее возможно потому, что решение это осуществляется лишь с некоторой степенью точности. Так, процесс вычисления величины отношения длины окружности и диаметра этой окружности представляет собой пример дискретного бесконечного процесса, выражением которого является построение числа $\pi=3,1415...$ Практически этим соотношением можно пользоваться только с определенной степенью точности, ограничиваясь при вычислениях некоторым конечным числом знаков числа $\pi$. Без подобных условий практическое использование абстракции потенциальной бесконечности было бы невозможным. Так как понятие потенциальной бесконечности базируется на идеальных предпосылках об осуществимости, то оно не может быть непосредственным («прямым» или «зеркальным») отображением тех процессов, которые имеют место в природе и мышлении. Однако история науки знает немало попыток приписывать процессам объективной действительности в точности тот же характер, который имеет математическое представление о потенциально бесконечной последовательности.

Неправомерность взгляда на абстракции, в том числе и абстракцию потенциальной бесконечности, как на «зеркальные» отображения объективных процессов постоянно подчеркивали классики марксистской философии. В частности, Ф. Энгельс целый раздел своей работы «Анти-Дюринг» посвятил критике концепции Дюринга, относящейся к бесконечности времени и пространства ([2], стр. 44—53).

В объективной действительности процессы вообще не носят такого дискретного характера, при котором их можно разложить всегда в некоторую последовательность отдельных друг от друга, жестко отличимых шагов. Энгельс не случайно называет подобное огрубление и подобную идеализацию реальных процессов абсолютно идеальной потребностью математики, но «идеальная потребность математики вовсе не есть принудительный закон для реального мира» ([2], стр. 49). Такого рода огрубление имеет большую познавательную ценность именно потому, что позволяет выделить в «чистом» виде интересующие нас закономерности реальных процессов; однако уже в силу наличия самого этого огрубления неправомерно полностью отождествлять реальные процессы с их идеальными представлениями, ибо последние носят лишь приближенный характер. Оценка возможной погрешности приближения как раз и выражает абсолютный момент в данной относительной истине.

Для теории алгорифмов, математической логики, теории абстрактных автоматов и т. п. дисциплин, играющих важнейшую роль в теоретической кибернетике, большое значение имеет не только ограничение построения своих объектов рамками абстракции потенциальной осуществимости, но и уточнение самого понятия о построении объекта. В результате этого уточнения возникает понятие о конструктивных объектах.

**Абстракция потенциальной осуществимости и конструктивные объекты.** Понятие конструктивного объекта так же, как и понятие потенциальной осуществимости, является содержательным понятием. Конструктивными объектами называются такие объекты, которые или предъявляются в таком виде, когда они доступны непосредственному наблюдению, или задаются эффективным (точным и вполне понятным) способом построения (алгорифмами). Эффективный способ построения предполагает построение, осуществимое при соблюдении условий, накладываемых на построение принятием абстракции потенциальной осуществимости, а кроме того, предполагает наличие алгорифма, согласно которому осуществляется каждый шаг построения. Объекты, требующие для своего построения более широких возможностей, не являются конструктивными. Например, натуральный ряд, мыслимый как актуально бесконечное множество, состоящее из всех натуральных чисел, не является конструктивным объектом, ибо не существует алгорифма для построения этого объекта. Как уже было сказано, потенциальная осуществимость не предполагает осуществимости построения всех шагов произвольного процесса, в том числе построения всех натуральных чисел.

**Конечные и бесконечные конструктивные множества.** В рамках абстракции потенциальной осуществимости можно строить, т. е. задавать эффективным способом, конструктивные объекты, в частности конструктивные множества. Причем эти множества могут быть как конструктивно конечными, так и конструктивно бесконечными.

Конструктивные и неконструктивные множества имеют сходство только в том, что они задаются двумя методами: списком элементов множества или некоторым предикатом, т. е. условием, накладываемым на множество. Первым методом задаются только конечные множества, вторым — как конечные, так и бесконечные.

Однако между конструктивной и неконструктивной точкой зрения на эти методы существует принципиальная разница. Каким бы методом ни задавалось множество, конструктивное понимание задания множества всегда связано с наличием эффективного способа его порождения. Если множество задается списком, то должен существовать эффективный способ задания этого списка. Если множество задается предикатом, то должен существовать эффективный способ распознавания того, удовлетворяет ли произвольный элемент (из некоторой области) данному предикату, т. е. является ли он элементом множества истинности этого предиката.

В конструктивной теории множеств понятие бесконечного множества не связывается с «актуальностью» множеств (т. е. с их «завершенностью», «данностью» всеми своими элементами), как это имеет место в классической теории множеств.

Основное внимание в этой теории уделяется способам задания множеств. Множество считается заданным, если имеется эффективный способ построения произвольного элемента множества. Например, существенным для построения множества натуральных чисел является то, что имеется эффективный способ построения произвольного элемента (натурального числа). Этот способ задается следующим индуктивным определением.

1. Исходный объект, обозначаемый символом 0, является натуральным числом, что записываем как $N$ (0).

2. Если объект $n$ — натуральное число, то и объект $n|$ является натуральным числом, т. е. ($N$ ($n$) $\supset$ $N$ ($n|$)).

С помощью этого определения можно задать такое конструктивное множество, каким является натуральный ряд 0, 0|, 0||,..., и поэтому натуральный ряд можно рассматривать как бесконечное множество, эффективно заданное конструктивным предикатом $\mathfrak{N}$ ($n$):

$$\mathfrak{N}(n) \rightleftharpoons N(0) \,\&\, (N(n) \supset N(n|)) .$$

Так же как и натуральный ряд, любое конструктивное множество задается конструктивным предикатом, определение которого связано с эффективным порождающим процессом.

В конструктивной теории множеств множество не только может задаваться предикатом, но, более того, множество может просто рассматриваться как эффективно заданный одноместный предикат, или формула с одной свободной переменной ($P$ ($x$), $Q$ ($x$) и т. п.). Такие формулы называются *однопараметрическими*. О свойствах множества можно в таком случае судить по свойствам однопараметрической формулы. Понятия «конструктивное множество», «однопараметрическая формула в данном языке» и «конструктивный предикат» по существу могут не различаться. Так как формулы имеют точно описанное построение и являются формулами некоторого языка в заданном алфавите, то объем понятия множества определяется данным языком. Так, логико-арифметический язык служит для построения логико-арифметических формул. Каждая формула выражает некоторое подмножество множества натуральных чисел.

«Универсальным множеством», задаваемым этим языком, является натуральный ряд.

Например, формула $(x = x)$, где $x$ — переменный термин, значениями которого могут быть слова, выражающие натуральные числа, задает натуральный ряд, являющийся универсальным множеством логико-арифметического языка.

Формула $\neg(x = x)$ выражает пустое множество (т. е. множество, не содержащее элементов), формулы $\exists y\,(x = 2y)$ и $\exists y\,(x = 2y + 1)$, где символ $\exists$ читается: «существует», выражают соответственно множества четных и нечетных чисел. Операции над множествами и суждения о множествах представляют конструктивные операции над формулами и суждения о формулах. (Истинность суждений при этом понимается конструктивно, например как реализуемость по Клини [7].)

Итак, произвольное множество $P$ задается однопараметрической формулой $P$, имеющей $x$ в качестве параметра. Если подобные формулы принадлежат логико-арифметическому языку, то они отождествляются с множествами натуральных чисел. Операции над множествами и суждения о множествах сводятся к операциям над формулами и к суждениям о формулах. Приведем примеры такого сведения. Пусть «$u$» — произвольный постоянный терм, обозначающий какой-либо индивидуальный предмет, например натуральное число, а символ $\in$ обозначает принадлежность предмета множеству. Пусть выражение $F^x_u \llcorner P \lrcorner$ означает подстановку терма $u$ вместо переменной $x$ в формулу $P$, а символ $\leftrightharpoons$ означает равенство по определению. Тогда $(u \in P) \leftrightharpoons F^x_u \llcorner P \lrcorner$; $(u \notin P) \leftrightharpoons \neg(u \in P)$. Пусть $(P \subset Q)$ означает, что $P$ есть подмножество $Q$. Тогда $(P \subset Q) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \forall u\,(F^x_u \llcorner P \lrcorner \supset F^x_u \llcorner Q \lrcorner)$; $P = Q \leftrightharpoons (P \subset Q \,\&\, Q \subset P)$. Если символы $\cup$, $\cap$ и $-$ соответственно означают объединение, пересечение множеств и дополнение к множеству, то

множеством $P \cup Q$ называется формула $(P \vee Q)$,
—·— $P \cap Q$ —·— —·— $(P \& Q)$,
—·— $-P$ —·— —·— $\neg P$.

Таким образом, проблемы конструктивных множеств сводятся к проблемам конструктивной логики.

То обстоятельство, что по свойству формул можно судить о свойствах множеств, вскрывает ряд интересных фактов, которые не обнаруживаются «классической» теорией множеств.

В конструктивной теории множеств, в отличие от «классической», двойное дополнение к множеству не совпадает, вообще говоря, с самим множеством, ибо в конструктивной логике формула $P \supset \neg\neg P$ истинна, но формула $(\neg\neg P \supset P)$ ложна, а поэтому в конструктивной теории множеств верно, что $P \subset --P$ (множество $P$ включено в дополнение дополнения $P$), но неверно, что $--P \subset P$, т. е. обратное утверждение.

Так как в конструктивной логике формула $\forall x\,(P \vee \neg P)$ не всегда верна, то множество $P \cup -P$ не всегда универсально. Если, например, приведенная формула есть формула логико-арифметического языка, то множество $(P \cup -P)$ не всегда совпадает с натуральным рядом, но его двойное дополнение $--(P \cup -P)$ совпадает с натуральным рядом, так как истинна формула $\neg\neg(P \vee \neg P)$. Это означает, что о произвольном элементе такого множества можно сказать, что он не может не принадлежать множеству, но не всегда удается доказать, что он принадлежит множеству.

«Классическая» теория множеств, в противоположность этому, допускает, что всегда можно выяснить вопрос о принадлежности элемента множеству; однако она при этом ничего не говорит о способе, с помощью которого это можно было бы сделать.

Если же подходить к суждениям о множествах более конкретно, если требовать, чтобы абстрактные утверждения подкреплялись конкретным эффективным способом их проверки, то классические рассуждения далеко не всегда могут быть оправданы. Например, далеко не всегда можно выяснить (в рамках абстракции потенциальной осуществимости, не говоря уже о реальной осуществимости) вопрос о принадлежности элемента множеству.

Конструктивная теория множеств позволяет выявить более тонкие свойства множеств, которые остаются невыявленными при классическом рассмотрении множеств. Например, классическая теория множеств не проводит качественных различий между конечными множествами. Любые подмножества конечного множества рассматриваются как конечные.

В конструктивной же теории множеств понятие конечного множества расщепляется.

**Конструктивные объекты и формальная логика.** Предметы научного познания всегда составляют те или иные множества. Естественно возникает вопрос, не зависят ли логические средства познания от свойств этих множеств, особенно от свойств бесконечных множеств.

Законы мышления не зависят от физической природы объектов нашей мысли. Как известно, в философии и логике прошлого вплоть до XX в. логические законы полагались универсальными и абсолютными истинами. С начала нашего столетия это представление подвергается критическому пересмотру. В особенности возникло сомнение относительно универсальности закона исключенного третьего. Рассуждения в соответствии с этим законом о предметах, составляющих бесконечные множества, предполагают актуальную данность этих множеств, т. е. явно или неявно опираются на абстракцию «абсолютной» осуществимости. Безусловную применимость этой абстракции в рассуждениях о любых объектах первыми подвергли резкой критике так называемые интуиционисты (Кронекер, Брауэр, Вейль, Гейтинг). Вейль называл эту абстракцию «божественным предположением». Брауэр в свою очередь доказывал, что на законе исключенного третьего не могут базироваться рассуждения о процессах или о «становящихся последовательностях».

Безусловная возможность решения вопроса о наличии или отсутствии некоторого свойства у любого элемента бесконечного множества, предполагаемая законом исключенного третьего, отвергается и в современной конструктивной математике и логике, поскольку конструктивистский подход к решению подобной задачи необходимо требует наличия соответствующего алгорифма. Имеется немало примеров, когда подобные вопросы принципиально неразрешимы из-за невозможности построения нужного алгорифма. Эти случаи представляют так называемые неразрешимые массовые проблемы. Доказательства их неразрешимости стали возможны лишь на основе точного понятия алгорифма. В различных формах такие понятия были созданы в последние десятилетия А. Тьюрингом, А. Чёрчем, С. К. Клини, А. А. Марковым и др. Было выяснено также, что если мы хотим рассуждать о конструктивных объектах таким образом, чтобы эти рассуждения не приводили к появлению неконструктивных объектов, то в общем случае мы должны пользоваться конструктивной логикой, не содержащей закона исключенного третьего. Рассуждения, удовлетворяющие *этим* требованиям, мы будем называть конструктивными рассуждениями.

До появления точного понятия алгорифма невозможно было строго доказать, что классическая логика (т. е. логика, содержащая закон исключенного третьего) непригодна для конструктивных рассуждений, хотя, как мы уже говорили, подобные попытки предпринимались интуиционистами. Совершенно точное доказательство данного факта, ставшее возможным после создания конструктивной логики и теории алгорифмов, имеет большое гносеологическое значение: логические законы оказались истинами не универсальными, а относительными, применимыми для рассуждений лишь при определенных условиях. Диалектический принцип конкретности истины получил тем самым точное обоснование в области формальной логики.

**Конструктивно бесконечные множества и формальная логика.** «Наивная» теория множеств (содержательная, неконструктивная) изучает множества со стороны двух свойств— мощности и порядка. Поэтому различия между конечными и бесконечными множествами, а также различия между самими бесконечными множествами устанавливаются относительно этих свойств. Такое различение не выявляет многих важных свойств множеств, причем таких свойств, которые так же, как свойства мощности и порядка, являются наиболее общими свойствами, присущими множествам самой различной физической природы.

Подход к изучению множеств, осуществляемый с точки зрения рассмотрения множеств со стороны их мощности, не позволяет выявить многих логических проблем, возникающих при рассмотрении как конечных множеств, так и бесконечных. Фактически выявляется лишь проблема правомерности применения тех или иных логических средств в рассуждениях о конечных множествах в отличие от бесконечных. Всякие различия в правомерности применения данных логических средств относительно класса конечных множеств считаются с логической точки зрения несущественными.

Однако можно показать даже на примере конечных множеств, что это далеко не так, если выявлять конструктивные свойства множеств. Аналогично дело обстоит и для бесконечных множеств.

«Наивная» теория множеств о множестве выводимых формул классического исчисления высказываний и множестве выводимых формул классического исчисления предикатов может сказать только лишь то, что оба эти множества могут быть вполне упорядочены и оба имеют счетную мощность. Однако для логики гораздо важнее то обстоятельство, что первое множество разрешимо, а второе — неразрешимо, но перечислимо. Как раз это обстоятельство вызывает к жизни массу логических проблем. Но оно то и не может быть обнаружено при изучении множеств только со стороны свойств порядка и мощности.

Конструктивный подход к изучению множеств, особенно бесконечных, позволяет ставить и разрешать ряд важных логических проблем. Прежде всего аналогично тому, как уточнялось понятие конечного множества, может быть уточнено и понятие бесконечного множества. Если считать интуитивно ясным описание конечного множества как такого множества $P$, которое может быть задано списком своих элементов: $P = \{a_1, \ldots, a_k\}$, то можно определить неконечное множество при помощи отрицательного определения, которое уже затем можно конструктивизировать.

*Неконечное множество* — множество, которое не может быть задано списком своих элементов. Определение неконечного множества можно следующим образом конструктивизировать (символ «$\setminus$» означает разность множеств). (КН$_1$) множество $M \subseteq U$ называется *конструктивно неконечным*, если существует такая всюду определенная частично-рекурсивная функция $\mathfrak{A}$, что для всякого $\alpha \in U$ выполняется включение

$$\mathfrak{A}\llcorner \alpha \lrcorner \in M \setminus \{\alpha\}.$$

$\mathfrak{A}$ — это такой алгорифм, который по любому элементу из кортежа $\{\alpha\}$ «выдает» элемент, не принадлежащий этому кортежу, но принадлежащий разности $M \setminus \{\alpha\}$. Так как $\mathfrak{A}$ алгорифмически вычислима, то $M$ конструктивно неконечно. Например, множество формул исчисления высказываний конструктивно неконечно, так как можно построить алгорифм, который по формуле любого списка формул выдавал бы формулу, не принадлежащую этому списку. Можно дать и другие определения конструктивно неконечных множеств, как эквивалентные определению (КН$_1$), так и не эквивалентные ему ([9], стр. 384—385).

Например, можно дать определение множества конструктивно неконечного в слабом смысле, которое не эквивалентно определению ($КН_1$).

Можно также конструктивизировать термин «бесконечное множество» ([9], стр. 387).

В результате различных уточнений понятия бесконечного множества выявляются различные понятия о конструктивной бесконечности.

Среди бесконечных множеств с логической точки зрения особый интерес представляют перечислимые множества и их подкласс — рекурсивные множества.

Пусть $U$ — некоторое универсальное множество, а $a_m$ — его произвольный элемент. Тогда множество $M \subseteq U$ называется *рекурсивно-перечислимым* (или просто перечислимым), если можно построить такой алгорифм, который дает *положительный ответ*, когда $a_m \in M$. Если $a_m \notin M$, то алгорифм ответа давать не обязан (ни положительного, ни отрицательного).

(Перечислимое) множество $M$, для которого имеется алгорифм, дающий для произвольного $a_m \in U$ ответ либо $a_m \in M$, либо $a_m \notin M$, называется *рекурсивным* (или разрешимым).

*Неперечислимые* множества — множества, не являющиеся перечислимыми. Примером перечислимого, но не разрешимого множества может служить множество выводимых формул классического исчисления предикатов, ибо существует алгорифмическое перечисление этих формул с помощью гёделевой нумерации.

Примером неперечислимого множества является множество невыводимых формул классического исчисления предикатов.

Действительно, множество выводимых формул этого исчисления хотя и перечислимо, но не разрешимо (результат Чёрча о неразрешимости проблемы разрешения классического исчисления предикатов). Отсюда тривиально следует неперечислимость множества невыводимых формул, ибо в противном случае множества выводимых и невыводимых формул были бы перечислимы, а множество выводимых формул тогда было бы разрешимым, что противоречит результату Чёрча.

Остановимся подробнее на значении для логики того факта, что конечные и бесконечные множества могут обладать свойствами разрешимости и перечислимости.

Исследование логических средств с помощью точных методов позволило выяснить, что классическая логика (классическое исчисление предикатов и классическая семантика) имеет основания для ее применения в рассуждениях лишь по отношению к определенного рода объектам. Этими объектами являются множества, обладающие свойствами, которые приписываются множествам «наивной» теорией множеств.

Однако подобные свойства не только не всегда имеются у множеств в действительности, но некоторые из них несостоятельны даже с более абстрактной точки зрения, а именно с точки зрения абстракции потенциальной осуществимости. Примером может служить свойство бесконечных множеств иметь «актуальный» (завершенный) характер. От свойств области зависит логическая семантика, от которой зависит в свою очередь приемлемость того или иного логического синтаксиса и определение логического закона.

Рамки, налагаемые абстракцией потенциальной осуществимости на понимание смысла логических операций, исключают употребление абстракции актуальной (завершенной) бесконечности при осмысливании этих операций. Иначе говоря, то осмысление, которое опирается на абстракцию актуальной бесконечности, с точки зрения абстракции потенциальной осуществимости может являться бессмыслицей. Если, например, мы рассуждаем о бесконечном множестве $P$, которое имеет актуальный характер, то утверждение об истинности суждений $\forall x P$ или $\exists x P$, где $P$ есть однопараметрическая формула с параметром $x$ и областью значений $P$, с точки зрения абстракции потенциальной осуществимости не имеет смысла, ибо эта абстракция не дает возможности мыслить завершенным бесконечное количество актов проверки истинности суждений

$$P(a_0),\ P(a_1),\ \ldots,\ P(a_n),\ \ldots,$$

где $a_n \in P$.

В рамках абстракции потенциальной осуществимости бесконечное множество не имеет «актуального» (завершенного) характера, поэтому истинность суждений $\forall x P$ или $\exists x P$ о некотором бесконечном множестве понимается соответственно как потенциальная осуществимость определенных операций, а именно суждение $\forall x P$ истинно тогда, когда можно указать потенциально осуществимый способ переработки каждого значения $x$ в доказательство

$P(x)$, т. е. каждого $a_n$ — в доказательство истинности $P(a_n)$. Суждение $\exists x P$ истинно тогда, когда имеется способ потенциально осуществить построение такого $a_n$, что $P(a_n)$ истинно.

Уже на основе этого примера можно видеть, что логические средства в рассуждениях о потенциально-осуществимых объектах отличаются от логических средств, допустимых при рассуждениях, относящихся к таким объектам, как актуально-бесконечные множества. Для этого достаточно рассмотреть правило доказательства от противного. В частном случае, который нас интересует, оно таково:

$$\frac{\forall x \neg P \rightarrow A \& \neg A}{\exists x P}.$$

Если окажется неприемлемым частный случай правила, то неприемлемо и само правило. Допустим, из предположения об истинности суждения $\forall x \neg P$ косвенным путем мы пришли к противоречию и доказали истинность $\exists x P$, не дав ни одного примера построения объекта $a_n$, такого, что $P(a_n)$ истинно. Тогда суждение $\exists x P$ с точки зрения конструктивной семантики не будет иметь смысла, ибо с точки зрения этой семантики не обоснована его истинность, так же как не обоснована и его ложность. Последнее следует из того, что предположение об истинности суждения $\exists x P$ может и не приводить к противоречию.

Таким образом, правило доказательства от противного, могущее служить источником бессмыслиц в том случае, когда существование объекта доказывается неэффективным способом, без указания способа потенциально осуществимого конструктивного построения объекта, нельзя применять в конструктивных рассуждениях о потенциально осуществимых конструктивных объектах. Это правило приводит к доказательствам существования объектов, потенциально не осуществимых, а по условию мы должны иметь дело только с потенциально осуществимыми объектами.

Чтобы устранить это правило из системы применяемых нами логических средств, надо устранить те правила и законы, благодаря которым данное правило становится выводимым, по возможности не устраняя при этом допустимых правил и законов.

Например, проще всего было бы устранить правило «доказательства путем приведения к противоречию», которое входит в построение доказательства от противного. Но нет никакого расчета отказываться от такого не только допустимого, но и очень нужного правила. Поэтому элиминируют другие правила и законы, устранение которых оказывается оправданным.

Есть веские основания для устранения закона снятия двойного отрицания ($\neg\neg P \supset P$) или закона исключенного третьего ($P \vee \neg P$). Во-первых, этого достаточно для устранения правила доказательства от противного, а тем самым и «чистых» теорем существования, или неэффективных доказательств.

Во-вторых, это оправдано с точки зрения следующих соображений: потенциальная осуществимость объекта связывается не с каким угодно, а с эффективным способом построения объекта. Например, если говорят о потенциальной осуществимости некоторого числа $k$, удовлетворяющего условию $P$, то под этим подразумевается наличие эффективного способа вычисления числа $k$, такого, что $P(k)$ истинно. Однако не всегда имеются эффективные способы решения массовой проблемы установления истинности таких суждений о действительных числах, как суждения $\forall x\,(P \vee \neg P)$ и $\forall x\,(\neg\neg P \supset P)$.

Более того, если уточнить понятие эффективного метода с помощью какого-либо из уточнений понятия алгорифма, то можно доказать, что подобного общего метода для решений вышеупомянутой проблемы не существует вовсе. Например, можно доказать, что не существует нормального алгорифма для решения массовой проблемы распознавания равенства действительных чисел нулю, т. е. нет эффективного метода установления истинности суждения $\forall x\,(x = 0 \vee \neg(x = 0))$, где $x$ — переменная для действительных чисел. Но тогда нельзя считать истинным суждение $\forall x\,(P \vee \neg P)$. Отсюда следует, что формулу $(A \vee \neg A)$ нельзя признать законом, т. е. формулой, истинной при всех значениях переменной $A$.

В противном случае из истинности $(A \vee \neg A)$ мы можем заключить об истинности $\forall x\,(P \vee \neg P)$, что опровергается примером.

Допустим, что формула $(A \vee \neg A)$ истинна при всех значениях переменных, тогда, подставив вместо $A$ однопараметрическую формулу $P$, получим формулу $(P \vee \neg P)$, свяжем эту формулу квантором $\forall$ и получим истинное суждение $\forall x\,(P \vee \neg P)$, но оно при нашей семантике ложно.

Таким образом, получилось противоречие, доказывающее, что формулу $(A \vee \neg A)$ нельзя рассматривать как формулу, выражающую логический закон, если семантика строится на основе абстракции потенциальной осуществимости, связываемой с алгорифмическими способами построения объектов (конструктивных объектов).

Вышеприведенные примеры показывают, что логические средства для рассуждений о конструктивных объектах, осуществимых в рамках абстракции потенциальной осуществимости, в общем случае должны отличаться от логических средств, допустимых для рассуждений о неконструктивных объектах, мыслимых в рамках абстракции актуальной бесконечности. Этот факт говорит о зависимости логических средств от области их применения, точнее—о зависимости логических средств от тех абстракций, в рамках которых мыслится возможность построения объектов данной области. Точное выявление логических средств, допустимых в рассуждениях о конструктивных объектах, дает конструктивное исчисление предикатов.

Однако в некоторых случаях при уточнении того, какими конкретно конструктивными свойствами обладают объекты и какого рода логических средств достаточно для проведения рассуждений, можно расширять рамки логических средств, применимых в конструктивных рассуждениях.

Логические средства классического исчисления высказываний нельзя считать безоговорочно применимыми в рассуждениях о произвольных конечных множествах, если эти рассуждения должны быть конструктивными. Тем более это сомнение справедливо по отношению к актуально бесконечным множествам, которые вообще не являются конструктивными объектами.

Но можно показать, что классическое исчисление высказываний, составляющее довольно широко употребляемую в рассуждениях часть логических средств классической логики, можно использовать для конструктивных рассуждений о рекурсивных множествах, как конечных, так и бесконечных. Однако, для рассуждений о перечисленных множествах они уже непригодны (с конструктивной точки зрения).

В самом деле, пусть $P$ — однопараметрическая формула, выражающая перечислимое множество. Известно, что не все операции исчисления высказываний сохраняют свойство перечислимости. Например, если формула $P$ выражает перечислимое множество, то формула $\neg P$ не обязана выражать перечислимое множество. Тогда формула $(P \vee \neg P)$ может не выражать перечислимое множество и вопрос об истинности формулы $(P \vee \neg P)$ будет алгорифмически неразрешимым. Он неразрешим именно тогда, когда вопрос об истинности этой формулы зависит от решения вопроса об истинности формулы $\neg P$.

Причина неприменимости классической логики в рассуждениях о перечислимых множествах заключается в том, что не любые формулы, полученные из формул, выражающих перечислимые множества, с помощью логических операций $\neg$, $\&$, $\vee$ и $\supset$, в свою очередь выражают перечислимые множества. Свойство перечислимости не сохраняют операции $\neg$ и $\supset$. Это приводит к тому, что если исходные множества перечислимы, т. е. исходные (атомарные) формулы выражают перечислимые множества, то в рассуждениях об этих множествах формула $(\neg\neg P \supset P)$ применима как логический закон, хотя формула $(P \vee \neg P)$ не применима в качестве логического закона. Здесь важно заметить, что формула $P$—именно атомарная формула, а не произвольная, ибо при произвольной формуле $P$ формула $(\neg\neg P \supset P)$ не является законом, так как при некоторых $P$ она может быть ложной. Для этого достаточно положить $P \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (Q \vee \neg Q)$, где $Q$—перечислимое множество. Тогда получим формулу $(\neg\neg(Q \vee \neg Q) \supset (Q \vee \neg Q))$. Антецедент этой формулы тождественно истинен, так как для произвольных формул конструктивно истинна формула $\neg\neg(P \vee \neg P)$. Консеквент же, как мы уже показали, может быть сделан ложным. Таким образом, всю данную формулу можно сделать ложной, и она не может быть принята в качестве логического закона для рассуждений о перечислимых множествах.

Вопрос о том, какая логика высказываний могла бы быть приемлемой для рассуждений о перечислимых множествах и была бы шире конструктивного исчисления высказываний, остается открытым.

Итак, с точки зрения требования конструктивности рассуждений существенным является не вопрос, конечные это множества или бесконечные, а вопрос о том, обладают или не обладают свойствами рекурсивности, перечислимости, неперечислимости (или какими-либо из более специальных их разновидностей) те множества, которые являются объектами наших рассуждений.

**Абстракция потенциальной осуществимости в математике и кибернетике.** Абстракция потенциальной осуществимости широко употребляется в математике независимо от существования различных направлений в этой отрасли науки.

Так называемая классическая математика допускает наряду с абстракцией потенциальной осуществимости абстракцию актуальной бесконечности. Классическая математика в качестве объектов исследования берет не только конструктивные объекты, но и неконструктивные. Однако та часть классической математики, которая связана с вычислениями, существенным образом опирается только на абстракцию потенциальной осуществимости. Поэтому уже на раннем этапе развития математики возникает идея ограничиться абстракцией потенциальной осуществимости.

Аристотель, например, говорил, что для математиков вполне достаточно понятия потенциальной бесконечности, а понятие актуальной бесконечности можно отбросить как практически ненужное. Потенциальную бесконечность Аристотель понимал как осуществимость неопределенно большого, но конечного числа объектов.

Идея ограничения математики рамками абстракции потенциальной осуществимости лежит в основе современной конструктивной математики и конструктивной логики. Логика и математика не могут обойтись без какой-либо формы осуществимости и бесконечности, ибо в противном случае теряется всеобщность их законов.

В самом деле, заранее не известно, какое количество объектов удовлетворяет данному закону. Однако закон должен быть верен для всех объектов, что и выражается явно или неявно квантором общности, понимаемым в рамках той или иной абстракции осуществимости.

Ф. Энгельс говорил, что бесконечность является формой всеобщности ([1], стр. 187—188). Всеобщность же можно понимать по-разному. Можно семантику термина «всеобщность» строить, исходя из допущения абстракции актуальной бесконечности, а можно ограничиться только потенциальной бесконечностью. Есть и другие понимания всеобщности, например понимание всеобщности с точки зрения допустимости абстракции «фактической бесконечности». Ни одно направление в логике и математике не может обойтись без абстракции потенциальной осуществимости или потенциальной бесконечности, хотя в отдельных случаях эту абстракцию можно заменять менее сильной абстракцией «фактической осуществимости».

Весьма важно также заметить, что существуют суждения, истинные в классической математике, принимающей абстракцию актуальной бесконечности, но ложные в конструктивной математике, исходящей из допустимости одной лишь абстракции потенциальной осуществимости. Хорошо известен следующий пример: классически истинно суждение $\forall x \forall y (x = y \vee \neg (x = y))$, но в конструктивной математике оно ложно, зато в конструктивной математике истинно его отрицание, т. е. суждение $\neg \forall x \forall y (x = y \vee \vee \neg (x = y))$, но в классической математике оно ложно ($x$ и $y$ в данном случае являются переменными для действительных чисел). Из этого примера ясно, почему конструктивная математика не может принять полностью все логические средства классической логики. Если допустить, что конструктивная математика приняла логические средства классической логики, тогда она приняла бы и закон исключенного третьего $(P \vee \neg P)$. Тогда в конструктивной математике был бы справедлив следующий вывод:

$$\frac{\dfrac{(P \vee \neg P)}{(x = y \vee \neg (x = y))}}{\forall x \forall y (x = y \vee \neg (x = y))}$$

В итоге получилось бы противоречие, так как в конструктивной математике истинна формула, являющаяся отрицанием суждения, полученного с помощью закона исключенного третьего. Ликвидация противоречия оказывается возможной за счет сокращения логических средств классической логики, которые полностью допускаются в классической математике.

Этот простой пример является конкретной иллюстрацией зависимости логических средств от области их применения. Более того, он показывает, что эта зависимость может быть обусловлена выбором различных форм абстракций осуществимости и бесконечности. Классическая арифметика действительных чисел принимает две абстракции бесконечности, а конструктивная — только одну из них — потенциальную, но это не значит, что первая шире второй. Они несравнимы, так как существуют предложения, истинные в первой и ложные во второй, и наоборот.

Данный факт имеет важное гносеологическое значение. Он показывает, что абстракция актуальной бесконечности, а поэтому и классическая математика, по необходимости отвлекается от таких свойств, от которых не отвлекается конструктивная математика, и наоборот, конструктивная математика необходимо отвлекается от таких свойств отображаемого объекта, от которых не отвлекается классическая математика. Это обстоятельство говорит о несовместимости систем классической и конструктивной математики. Причина несовместимости лежит не только в том, что конструктивная математика использует абстракцию потенциальной осуществимости, но и в том, что понимание осуществимости связывается с возможностью алгорифмического построения объектов. Классическая математика отвлекается от обязательного наличия возможности алгорифмического решения тех или иных проблем. Поэтому истинность в классической математике понимается иначе, чем в конструктивной математике.

Истинность суждений в классической математике не связывается необходимым образом с наличием алгорифма проверки истинности математических суждений. В конструктивной математике истинность математических суждений необходимо связывать с наличием подобного алгорифма. Таким образом, принятие тех или иных абстракций осуществимости существенным образом оказывает влияние на понимание и решение гносеологических вопросов математики, в частности проблемы истины в математике.

Алгорифмическое решение задач, хорошо согласуемое с абстракцией потенциальной осуществимости, не совместимо с абстракцией актуальной бесконечности. Этот факт в конечном счете является причиной несовместимости классической и конструктивной математики. Конструктивная математика ограничивает себя рамками абстракции потенциальной осуществимости, но существенно новое по сравнению с классической математикой, не ограничивающейся этой абстракцией, вносит в нее все же точное понятие об алгорифме. Так, например, имеется существенное различие между классическим и конструктивным понятиями существования предела, хотя оба эти понимания не выходят за рамки потенциальной осуществимости. Предел может существовать в классическом понимании этого термина, но в то же время может не существовать в конструктивном его смысле.

В классическом анализе, например, справедливо утверждение о том, что монотонно возрастающая ограниченная последовательность рациональных чисел имеет предел, т. е. является сходящейся последовательностью. Однако при конструктивном понимании предела можно построить пример монотонно возрастающей, ограниченной, но не сходящейся (точнее — не вычислимо сходящейся) последовательности рациональных чисел ([19], стр. 349—350).

Всякая теория имеет ограниченную область применения, в том числе и теории, использующие абстракцию потенциальной осуществимости. Противоречия возникают тогда, когда теория применяется за пределами этой ограниченной области. Абстракция потенциальной осуществимости также имеет ограниченную область применения. В общем случае допустимость ее ограничена предположением о том, что изменения некоторого свойства объекта не приводят к изменению основных свойств данного объекта (качества объекта). Имеются многочисленные примеры типа «парадокса кучи зерна», которые свидетельствуют о том, что абстракция потенциальной осуществимости, применяемая вне пределов допустимой области применения, приводит к противоречиям.

В § 3 будет рассмотрен пример Ван Данцига, который он приводит с целью критики абстракции потенциальной осуществимости. На самом же деле этот пример свидетельствует вовсе не о том, что данная абстракция непригодна вообще, а о том, что она лишь ограниченно пригодна для различных приложений математики, на ней основанной.

Логические трудности появляются тогда, когда мы применяем абстракцию потенциальной осуществимости там, где фактически она не должна применяться ввиду того, что является слишком сильной предпосылкой. Если, например, решать вопрос о практической вычислимости какой-либо функции, принимая абстракцию потенциальной осуществимости, то заведомо ясно, что ответ может быть неверным.

Аналогичная ситуация встречается в том случае, когда, например, надо решить вопрос о том, можно ли практически пользоваться такой формальной системой, которая хотя и противоречива, но притиворечие в которой обнаруживается на практически неосуществимом шаге вывода.

Преодоление указанных трудностей состоит не в полном отказе от абстракции потенциальной осуществимости, а в ограничении области ее применения.

Абстракция потенциальной осуществимости лежит в основе подавляющего большинства теорий, составляющих теоретическую кибернетику, например абстрактной теории алгорифмов, алгебры логики, теории автоматов (см. [10], главы I, II, III). Данная абстракция наряду с абстракцией отождествления является предпосылкой образования таких фундаментальных понятий теоретической кибернетики, какими являются понятия буквы, абстрактного алфавита, алгорифма, операции над алгорифмами, формулы, булевой функции, формального доказательства, переключательной функции, абстрактного автомата, события и т. п.

Именно абстракция потенциальной осуществимости придает законам теоретической кибернетики, выражаемым с помощью понятий, в основании которых она лежит, специфическую форму всеобщности.

Это обстоятельство весьма существенно для решения задач как технической кибернетики, так и философских проблем кибернетики, в частности для ответа на вопрос о возможном и невозможном в кибернетике (см., например, [11]).

Так, в теоретической кибернетике само понятие возможного основывается на абстракции потенциальной осуществимости. Соответственно невозможное будет означать выход за рамки этой абстракции. Например, в теоретической кибернетике вполне правомерно говорить о возможности реализации любого алгорифма, ибо существует понятие универсальной цифровой машины, производящей такую реализацию. Однако подобная машина должна иметь потенциально бесконечную память. Значит это абстрактный объект, основанный на абстракции потенциальной осуществимости.

Поэтому поставленная задача хотя и находит свое решение в теоретической кибернетике, может не решаться технической кибернетикой, основывающейся уже на реальных возможностях цифровых машин, так как бесконечную память реально осуществить невозможно. Увеличивая емкость внешней памяти технически осуществимых цифровых машин, техническая возможность осуществления любого алгорифма неограниченно приближается к теоретической возможности.

Надо сказать, что ряд проблем кибернетики, например проблему автоматизации доказательств некоторого вида ([10], гл. VI, § 3), возможно решить с точки зрения теоретической возможности, но не с точки зрения технической возможности.

Между прочим, это обстоятельство не безразлично для теоретической кибернетики. Так, например, есть очень простые теоретические процедуры разрешения для некоторого класса формул, которые оказываются мало пригодными для технической реализации. Поэтому приходится перестраивать теорию, выявлять более сложные алгорифмы и в большем количестве, но лучше реализуемые технически.

## § 2. Абстракции «абсолютной» осуществимости и актуальной бесконечности

**Абстракция «абсолютной» осуществимости.** В классической математике и логике принимается еще более сильная абстракция осуществимости, чем абстракция потенциальной осуществимости. Ввиду предельно сильной идеализации реальной осуществимости эту абстракцию можно назвать «абсолютной» осуществимостью. Суть абстракции «абсолютной» осуществимости заключается в том, что осуществимым считается всякий объект, который можно мыслить без противоречий, а точнее говоря, определение которого в данной системе не приводит к противоречию.

Ясно, что конструктивные объекты согласно самому характеру их определения (через указание способов построения) могут мыслиться без противоречий и потому являются «абсолютно» осуществимыми объектами. Но «абсолютно» осуществимыми могут также быть и объекты неконструктивные, способ эффективного построения которых либо не известен, либо его вообще не существует. Примерами объектов последнего рода являются актуально бесконечные множества.

Абстракция абсолютной осуществимости в применении к какому-либо абстрактному объекту предполагает возможность отвлечения не только от реальных материальных возможностей построения этого объекта, но и вообще от наличия какого-либо эффективного способа его построения. Поэтому это наиболее сильная из известных абстракций осуществимости.

В аксиоматических теориях множеств осуществимость множеств, элементы которых обладают некоторым свойством, выражается через различного рода аксиомы, именуемые аксиомами свертывания. (Они также называются иногда аксиомами существования или экзистенциальными аксиомами.)

Согласно содержательному смыслу этих аксиом, достаточно дать некоторое несамопротиворечивое определение, чтобы считать существующими объекты, удовлетворяющие этому определению. Разница между различными аксиомами свертывания заключается в требованиях, которым должны удовлетворять определения. Получается, что предметы конструируются определениями, причем это конструирование не ограничивается эффективными методами построения. Их существование просто постулируется экзистенциальными аксиомами.

Как мы уже говорили, в общем случае множество объектов задается предикатами. Предикат выражает условия, накладываемые на множество. В языке, имеющем точно специфицированную структуру, предикат записывается в виде параметрической формулы. Приведем простейшее выражение принципа (аксиомы) свертывания.

Пусть $X$, $Y$, $Z$ — переменные для множеств, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ — переменные для индивидуальных предметов, либо множеств. Пусть символ «$\varepsilon$» означает либо принадлежность предмета множеству, либо включение множества в множество, а символ $\varphi$ — произвольный предикат, не содержащий свободно $Y$. Это условие необходимо, но не достаточно для выражения того обстоятельства, что утверждение об осуществимости объекта не должно вести к противоречию. Если это условие устранить, то в само определение объекта $\varphi(\tilde{Z})$ будет входить $Y$, т. е. тот объект, который создается этим определением, что недопустимо. Принцип свертывания можно записать следующим образом:

$$(1)\ \exists Y \forall \tilde{Z} (\tilde{Z} \varepsilon \tilde{Y} \equiv \varphi(\tilde{Z})).$$

Однако данная форма принципа свертывания не фиксирует условий, при которых объект был бы осуществим только тогда, когда он был бы непротиворечиво определен. Это нетрудно показать, например, образовав множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя, что можно записать формулой

$$(2)\ \varphi(\tilde{Z}) \Leftrightarrow \neg(\tilde{Z} \varepsilon \tilde{Z}).$$

Построению объекта здесь не предпосылается никакого реально осуществимого способа построения, не учитывается даже возможность отсутствия алгорифма построения. Всякая задача на «построение» объекта тем самым принимается за решенную.

Такая ничем не ограниченная свобода «построения» множеств ведет к тому, что можно выводить утверждения о существовании объектов, обладающих противоречивыми свойствами. Действительно, обозначив символом «$\rightarrow$» термин «следует», получим:

$$(1), (2) \rightarrow (3)\, \exists Y \forall \tilde{Z} (\tilde{Z} \varepsilon Y \sim \neg (\tilde{Z} \varepsilon \tilde{Z})).$$

Пусть $r$ — индивидуальный терм, например какое-то конкретное множество из класса $Y$. Тогда

$$(4)\ \exists Y F(Y) \rightarrow F(r),$$

$$(3), (4) \rightarrow (5)\ \ \forall \tilde{Z} (\tilde{Z} \varepsilon r \sim \neg (\tilde{Z} \varepsilon \tilde{Z})),$$

$$(5) \rightarrow (6)\ (r \varepsilon r) \sim \neg (r \varepsilon r).$$

что и свидетельствует о самопротиворечивости объекта, вводимого определением $\varphi(\tilde{Z})$. Поэтому содержательное требование непротиворечивости, накладываемое на осуществимость объектов, должно быть как-то выражено самим построением аксиомы существования. В разных теориях это выражается по-разному. Например, в теории типов оно выражается путем введения условий, запрещающих непредикативные определения. Смысл принципа свертывания в теории типов состоит в том, что для всякого предложения, служащего определением объектов типа $i$, существует соответствующий ему класс типа $i+1$. Символически это записывается предложением

$$(7)\ \exists Y_{i+1} \forall \tilde{Z}_i (\tilde{Z}_i \varepsilon Y_{i+1} \equiv \varphi(\tilde{Z}_i)).$$

Кроме теории типов принцип свертывания, в ослабленной форме, содержат и другие аксиоматические теории множеств (теории множеств Цермело, Цермело — Френкеля, фон Неймана — Бернайса). «Наивная» теория множеств использует этот принцип как содержательное условие, записываемое в виде предложения (1).

Постулирование осуществимости объектов произвольной природы, удовлетворяющих единственному требованию непротиворечивости, является чрезвычайно сильной гипотезой осуществимости. Не случайно некоторые математики называли ее «божественным предположением» (см. [12]), Ввиду того, что эта гипотеза выражает самые широкие рамки осуществимости, мы ее назвали «абсолютной» осуществимостью. Принимая гипотезу «абсолютной» осуществимости, вполне осмысленно говорить об осуществимости объектов, существование которых доказывается методом доказательства от противного.

Такое широкое понимание осуществимости вполне оправдывает, например, осуществимость даже таких объектов, как актуально-бесконечные множества, если только определения этих множеств не противоречивы. Например, утверждение (3) о существовании множества $Y$ не является правомерным, так как оно ведет к противоречию. Но нет видимых причин говорить о неосуществимости множества всех натуральных чисел как множества «актуального», завершенного, данного сразу всеми своими элементами. Несмотря на то, что не существует эффективных способов построения такого множества, его можно определить, например, как множество, удовлетворяющее аксиоме полной математической индукции, отвлекаясь вообще от существования способов построения полностью всех элементов данного множества. Нет оснований говорить о противоречивости подобного представления, если только учитывать характер принимаемого при этом предположения об осуществимости.

**Абстракция актуальной бесконечности.** С еще более сильной идеализацией, чем абстракция потенциальной бесконечности, связана абстракция актуальной бесконечности, которой пользуются уже более двух с половиной тысяч лет классическая математика и классическая логика. Абстракцию актуальной бесконечности иногда представляют как допущение возможности завершения бесконечного процесса. Например, актуально бесконечное множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ иногда рассматривают как результат завершения бесконечного процесса порождения чисел последовательности $0, 1, 2, \ldots n, \ldots$ Результат завершения подобных процессов мыслится как множество объектов, элементами которого являются объекты, возникающие на каждом шагу бесконечного процесса. Само множество представляется объектом завершенным, «ставшим» — в смысле актуально данным («актуальным»). Такое истолкование абстракции актуальной бесконечности чревато противоречиями. Однако возможно и непротиворечивое понимание абстракции актуальной бесконечности. Для этого надо дать совместимые между собой истолкования свойств бесконечности и «актуальности».

Под **актуальной бесконечностью** можно понимать представление об *актуально* бесконечном множестве, построение всех элементов которого не связывается с завершением бесконечного процесса порождения произвольных элементов этого множества. Актуальный характер множества будет означать в таком случае отвлечение от процесса порождения (или построения) всех тех элементов, из которых состоит данное множество, что даст основание для возможности мыслить такое множество как объект, данный сразу всеми своими элементами. Множества можно подразделить на конечные и бесконечные.

**Бесконечным** множеством, согласно общей теории множеств, называется множество $M$, содержащее в себе другое множество $M_1$, являющееся его истинным подмножеством, т. е. не совпадающее с множеством $M$, и такое, что между его элементами и элементами $M_1$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Последнее условие означает эквивалентность множеств $M$ и $M_1$. Хорошо известно, что множество действительных чисел, заключенных между 0 и 1, бесконечно. Это множество является бесконечным, хотя оно имеет «начало», т. е. наименьшее число 0, и «конец», т. е. наибольшее число 1. Название «бесконечное» к нему применено в том смысле, что нет конца пересчету членов этого множества. Данное множество имеет «актуальный» характер, ибо числа, в него входящие, мыслятся данными одновременно. Приведенное определение бесконечного множества охватывает лишь актуально бесконечные, но не конструктивно бесконечные множества, и при этом, как нетрудно заметить, построение всех членов этого множества не связывается с какими-либо эффективными процессами построения, что очень важно для того, чтобы понятия бесконечности и «актуальности» были совместимы.

Одно из принципиальных различий между конечными и бесконечными множествами состоит в следующем. Указание эффективного способа построения произвольного элемента конечного множества тем самым определяет уже способ построения всего множества в целом, т. е. всех его элементов. Однако если даже и существует эффективный способ построения произвольного элемента актуально бесконечного множества, то в принципе не существует эффективных способов построения всех элементов такого множества, ибо это построение должно быть связано с завершением бесконечного процесса. Так, например, мы уже говорили о существовании способа построения произвольного элемента $n$ бесконечного множества натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, \ldots \ldots, n, \ldots\}$, т. е. произвольного натурального числа.

Но нет и не может быть способа построения всех элементов множества $N$, т. е. всех натуральных чисел. Несмотря на это, множество $N$ можно мыслить как завершенное, «ставшее», данное всеми своими элементами, т. е. «актуальное». Некоторые множества мы настолько привыкли мыслить неразрывно связанными с определенными алгорифмами построения их элементов, что мыслить их «актуальными», данными всеми своими элементами, но не построенными с помощью этих алгорифмов, кажется невозможным. Например, не приходя к противоречию, натуральные числа можно мыслить совместно с алгорифмом построения произвольного натурального числа, заключающимся в последовательном прибавлении единицы к исходному числу 0. Но нельзя «актуальный» характер множества натуральных чисел, т. е. построение всех натуральных чисел, в нашем представлении связывать с построением «последнего» натурального числа. Такое представление о множестве натуральных чисел, конечно, противоречиво, ибо «последнего» натурального числа не существует. Но вполне непротиворечиво мыслить множество натуральных чисел, данное всеми своими элементами, при условии, что его «построение» мы не будем связывать с вышеуказанным алгорифмом построения. Оно может быть задано (построено) просто указанием свойства, которое присуще всем натуральным числам, независимо от того, что алгорифмов для построения всех натуральных чисел не существует. Так что само по себе данное свойство множеств нельзя считать непременно приводящим к противоречиям.

*По интуитивным соображениям* «актуальный» характер конечных множеств у нас не вызывает возражений, ибо мы не сомневаемся в «принципиальной» возможности построения всех элементов этих множеств, хотя нередко и не знаем, как действительно это можно сделать. Но актуальный (завершенный) характер бесконечных множеств кажется нам неоправданным, ибо мы не представляем никакого способа построения всех элементов этих множеств. Однако подобные интуитивные соображения не могут служить научно обоснованным возражением против свойства «актуальности» множеств, хотя они и показывают, насколько тесно связаны представления об объекте с возможностью его эффективного построения. Если же подходить к построению бесконечных множеств с точки зрения возможностей абстракции потенциальной осуществимости, то естественно, что бесконечное множество не может быть осуществимо как множество, данное сразу всеми своими элементами. Из этого следует только одно — об актуально бесконечных множествах и их свойствах нельзя судить с точки зрения абстракции потенциальной осуществимости, ибо их рассмотрение требует более сильных предположений об осуществимости.

В различных содержательных теориях множеств (в теории точечных множеств, в теории трансфинитных чисел и т. п.) зачастую пользуются сразу двумя гипотезами осуществимости. Кажется, что это должно неминуемо привести к противоречиям. Однако на самом деле это не так. Для логики подобная ситуация представляет несомненный интерес, и мы на ней остановимся подробнее.

**Логические вопросы взаимосвязи абстракций потенциальной и «абсолютной» осуществимости.** Для конструктивного направления в математике и логике, в отличие от классического, весьма существен скрупулезный подход к выяснению того, где применяется та или иная из рассматриваемых абстракций осуществимости. Но конструктивисты не пользуются широкими рамками абстракции абсолютной осуществимости, ограничиваются абстракцией потенциальной осуществимости, требованием эффективного построения абстрактных объектов; поэтому вопрос о возможности возникновения противоречий в результате совместного употребления обеих абстракций осуществимости для них отпадает. Однако подобного рода трудности возникают в классической математике и логике, поэтому интересно выяснить «механику» рассуждений в теориях, использующих оба вида осуществимости, но не ведущих к противоречиям. Для простоты возьмем пример, в котором достаточно ясно выступает применение обеих форм бесконечности в одной и той же теории.

Четкие разграничения в применении как абстракции актуальной бесконечности, так и абстракции потенциальной бесконечности в одном и том же построении, а также оформление самой идеи совмещения абстракции потенциальной осуществимости с абстракцией «абсолютной» осуществимости в виде некоторых правил мы находим в построении трансфинитных чисел Г. Кантором ([13], [14]).

В этой теории осуществимым предполагается, например, не только построение произвольных натуральных чисел (для чего достаточна абстракция потенциальной осуществимости), но и построение актуально бесконечного множества натуральных чисел и даже множеств произвольных мощностей. Если отвлечься от наличия эффективного способа построения множеств, вполне естественно признать осуществимыми не только множества произвольных мощностей, но и такие множества, как множество всех порядковых чисел и множество всех количественных чисел. С. Клини, например, говорит по этому поводу, что запрещение множества всех количественных чисел фактически означает запрещение множества всех натуральных чисел ([17], стр. 42).

Едва ли есть необходимость останавливаться на понятиях порядкового и количественного числа. Однако нам важно то, что с множеством всех порядковых (ординальных) чисел связан парадокс Бурали-Форти, а с множеством всех количественных (кардинальных) чисел связан парадокс Кантора и что источник этих парадоксов (о которых подробнее будет сказано ниже) кроется в забвении требования понимать осуществимость актуально бесконечного множества, непременно абстрагируясь от процесса построения всех его элементов. Чтобы обосновать это утверждение, следует привести некоторые сведения из теории построения целых чисел, разработанной Г. Кантором. В этой теории числа строятся при помощи попеременного применения двух принципов построения, базирующихся на разных абстракциях осуществимости, причем ни один из этих принципов не может быть удален из теории.

Первый принцип, по Кантору, «заключается в повторном полагании и соединении положенных в основу и рассматриваемых как равные единиц». С помощью одного только этого принципа можно построить сколь угодно длинный ряд натуральных чисел, среди которых нет наибольшего. Для этого вначале полагается единица, затем она полагается повторно, соединяется с положенной в основу единицей и в результате образуется множество из двух единиц. Потом образуются множества из трех, четырех и т. д. единиц. Принципа присоединения единицы достаточно для образования произвольных конечных чисел.

Нетрудно видеть, что этот принцип основан единственно на одной абстракции потенциальной осуществимости. С точки зрения этой абстракции говорить о завершенности процесса порождения конечных чисел не имеет смысла. Данный принцип дает возможность построить произвольное натуральное число, но не дает возможности образовать множество всех этих чисел. Чтобы иметь такую возможность, надо принять также абстракцию «абсолютной» осуществимости. Это делается введением второго принципа — принципа порождения порядковых трансфинитных чисел. «Если дана какая-нибудь определенная последовательность целых реальных чисел,— пишет Кантор,— то на основании 2-го принципа порождения создается новое число, которое мыслят как предел этих чисел, т. е. которое определяют как первое число, большее всех этих чисел» ([13], § 11).

Первый принцип говорит о том, как строить произвольное число некоторого бесконечного множества чисел. Такое построение образует числовую последовательность. Второй принцип воплощает идею завершенности бесконечного множества чисел того самого рода, произвольное число которого строится с помощью применения первого принципа. При этом образование бесконечного множества чисел некоторого рода (числового класса) не требует завершения построения последовательности чисел этого же рода, что избавляет от противоречия при применении второго принципа порождения. Если с помощью первого принципа был порожден натуральный ряд 1, 2, 3,..., $n$,..., то с помощью второго принципа мы получаем бесконечное множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, мыслимое как завершенное. В теории Кантора это осуществляется с помощью создания нового числа, обозначаемого буквой $\omega$, которое суть первое число, следующее за всеми числами 1, 2, 3,..., $n$,... и большее любого из них.

Непосредственно при порождении числа $\omega$ первый принцип не играет существенной роли, поэтому от него можно абстрагироваться; но когда число $\omega$ порождено, на сцену вновь выступает первый принцип: с его помощью порождается новый бесконечный ряд чисел $\omega$, $\omega + 1, \ldots, \omega_n, \ldots$; второй принцип позволяет образовать множество $\{1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots\}$ путем полагания числа $\omega \cdot 2$.

Таким образом, зная, как построить произвольный член некоторой последовательности чисел, второй принцип позволяет образовать множество всех чисел данного рода путем полагания первого числа, которое следует за всеми числами этой последовательности. Комбинирование принципов Кантора приводит к построению бесконечного ряда ($\alpha$), состоящего из конечных и трансфинитных чисел:

$$(\alpha)\ 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega,\ \omega+1, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}, \ldots, \Omega_1, \ldots$$

Без всяких противоречий мы можем построить числовой класс любой мощности, как конечной, так и трансфинитной. Более того, сами мощности, или кардинальные числа, образуют бесконечную последовательность $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots$ $\ldots, \aleph_\omega, \ldots, \aleph_{\Omega_1}, \ldots, \aleph_{\Omega_n}$, члены которой порождаются при помощи правил, аналогичных первому и второму принципам (см. [15], § 7, теоремы I и II).

Таким образом, при построении чисел существенны оба принципа порождения, обе гипотезы, как потенциальной, так и абсолютной осуществимости, но существенными они выступают не сразу вместе, а попеременно. Вначале существенным является сам бесконечный процесс эффективного порождения, затем существен результат этого процесса, который можно рассматривать даже независимо от процесса. Когда мы имеем дело с конечными процессами, то эта ситуация воспринимается без всяких трудностей, ибо процесс оканчивается и получается определенный результат. Трудность наступает тогда, когда процесс — бесконечный, никогда не оканчивающийся. И тут нельзя по аналогии с конечными процессами результат мыслить как итог окончания процесса. Результат здесь независим от процесса, и осуществимость результата вводится на основе других предпосылок, нежели осуществимость самого процесса. В приведенном построении существование результата основывается на абстракции «абсолютной» осуществимости, а существование процесса — на абстракции потенциальной осуществимости. Если возникает ситуация, когда требуется «породить» такой объект, порождение которого, с одной стороны, предполагает наличие обоих принципов, а с другой стороны, в то же время требует отказа от одного из них, то она приводит к противоречию. Подобная ситуация получается, например, тогда, когда требуется построить множество всех порядковых чисел (или множество всех кардинальных чисел).

Рассмотрим эту ситуацию на примере множества всех порядковых (ординальных) чисел. (Для множества всех кардинальных чисел рассуждения аналогичны.) На первый взгляд кажется, что такое множество образовать можно, и это не приведет к противоречию. В самом деле, применяя попеременно 1-й и 2-й принципы, построим ряд

$$(\alpha)\ 1, 2, \ldots n, \ldots, \omega, \ldots, \Omega_1, \ldots, \Omega_2, \ldots, \Omega_\omega, \ldots$$

Теперь так же, как при построении любого множества, применим 2-й принцип и образуем множество всех ординальных чисел. Это действительно кажется столь же возможным, сколь возможно образование множества всех натуральных чисел. Но на этом аналогия между построением всех натуральных чисел и всех ординальных чисел кончается и выступают существенные различия. Построив множество всех натуральных чисел, можно строить множества более высоких мощностей, применяя вначале 1-й принцип, затем 2-й принцип порождения и т. д. Построение множества всех натуральных чисел не отрицает возможности дальнейшего применения 1-го принципа порождения.

Но если мы утверждаем, что построили множество в с е х ординальных чисел $\{\alpha\}$, то этим самым возможность применения 1-го принципа порождения исключается, ибо его применение дает ординальное число, которое должно одновременно и принадлежать и не принадлежать множеству всех ординальных чисел.

Действительно, пусть множество всех ординальных чисел образовано с помощью порождения числа $W$. Тогда по 1-му принципу порождения можно образовать число $W+1$. Так как число $W+1$ является ординальным числом, то оно должно принадлежать множеству всех ординальных чисел, а так как число $W+1$ является числом, следующим за числом $W$, определяющим множество всех ординальных чисел, то оно не должно принадлежать множеству всех ординальных чисел. Этот явный парадокс был обнаружен Ч. Бурали-Форти. Как уже говорилось, парадокс Кантора, касающийся образования множества всех кардинальных чисел, получается с помощью аналогичных рассуждений. Эти парадоксы приводят к возникновению еще одной трудности, уже возникающей *не в теории Кантора, которую мы* назовем парадоксом Хаусдорфа (нам неизвестно, был ли он замечен кем-либо до Хаусдорфа). Она заключается в том, что, с одной стороны, множество всех ординальных (а также и кардинальных) чисел кажется столь же осуществимым, сколь осуществимо множество натуральных чисел, а с другой — оказывается, что множество натуральных чисел действительно осуществимо в теории Кантора, ибо не ведет к противоречиям, а множество ординальных (и кардинальных тоже) чисел неосуществимо, так как приводит к противоречию.

По данному поводу Хаусдорф пишет: «Тревога, внушаемая этой антиномией, коренится не в том, что мы натолкнулись на противоречие (имеется в виду парадокс Кантора.— *Ю. П.*), а в том, что этого противоречия мы не ожидали: множество кардинальных чисел кажется столь же неоспоримым, как и множество натуральных чисел» ([15], стр. 35). «Парадокс» Хаусдорфа можно разрешить, если проанализировать условия осуществимости тех множеств, о которых в нем идет речь. Действительно, утверждение о том, что множество всех ординальных (или кардинальных) чисел ни при каких условиях не осуществимо, так же неверно, как неверно утверждение о том, что это множество при всяких условиях осуществимо. Данный вопрос должен решаться конкретно: в теории, в которой по меньшей мере не постулируется неограниченная возможность применения первого принципа или в которой вообще нет подобного принципа, множество всех ординальных (и кардинальных) чисел является осуществимым объектом, не приводящим к противоречиям. В теории же Кантора это множество является объектом неосуществимым, так как требует отказа от неограниченного применения первого принципа, что противоречит условиям построения, принятым в этой теории.

Парадоксы Бурали-Форти и Кантора не возникают в теории, абстрагирующейся от процесса построения бесконечных множеств. Они возникают в теории Кантора только потому, что эта теория предполагает неограниченное применение 1-го и 2-го принципов, которое несовместимо с построением множества всех ординальных (а также кардинальных) чисел. Значит, причина противоречий состоит не в том, что некоторые множества не могут быть одновременно и бесконечными и «актуальными», а в том, что эти множества мыслятся построенными в такой теории, в которой они, согласно предпосылкам этой теории, не могут быть построены.

Рассмотренное нами понимание свойств бесконечности и «актуальности» множества еще не полностью устраняет кажущуюся противоречивость абстракции актуальной бесконечности. Из истории математики известно, что понятие актуальной бесконечности долгое время считали противоречивым: думали, что утверждение об эквивалентности части (истинного подмножества) целому (всему множеству) противоречит «очевидному» и «универсальному» принципу математики — «часть не равна целому». Оказалось, однако, что принцип «часть не равна целому» не является «универсальной» истиной и что он представляет собой положение, истинное только в конечных областях, но не в области бесконечного. Разрешение противоречия состояло в том, что данный принцип был удален из теорий, использующих абстракцию актуальной бесконечности. Как и в других случаях, решение трудностей, связанных с парадоксами (антиномиями), возникающими в математике и логике, происходит путем осознания диалектического по своему существу принципа конкретности истины в применении к указанным наукам.

**Логические проблемы абстракции актуальной бесконечности.** Мы уже говорили о том, что логические средства зависят от области их применения, т. е. от свойств той области объектов, о которой мы рассуждаем. Если эти объекты наших рассуждений — конструктивные, всегда мыслимые совместно с эффективным способом их построения, и если наши рассуждения должны быть конструктивными, то в общем случае в рассуждениях о подобных объектах должна применяться конструктивная логика. Однако в отдельных случаях для конструктивных рассуждений о конструктивных объектах определенного вида могут употребляться логические средства классической логики. Этими объектами являются рекурсивные множества. Если считать, что конечные множества рекурсивны, то в рассуждениях о них средства классической логики вполне оправданы.

Актуально бесконечные множества (подобно конечным) можно мыслить наделенными такими свойствами, что в рассуждениях о них оправдываются логические средства классической логики. Фактически это всегда неявно имеет место в классической теории множеств.

В общей теории множеств бесконечное множество определяется двумя способами.

1. Вначале определяется понятие конечного множества, а определение бесконечного множества дается путем отрицания определения конечного множества. Подобное определение называется отрицательным.

2. Дается непосредственно положительное определение бесконечного множества.

*Множество называется бесконечным, если оно содержит истинное подмножество, эквивалентное всему множеству.* (Данное свойство бесконечных множеств долгое время казалось парадоксальным лишь только потому, что им не обладают конечные множества. После работ Б. Больцано и Г. Кантора это неверное мнение было преодолено.)

Эквивалентность подмножества множеству устанавливается путем указания двух функций, определяющих взаимно-однозначное соответствие между элементами множества и элементами его правильного подмножества. Такие функции могут и не быть вычислимыми, т. е. может не существовать алгорифма, вычисляющего их значения. Поэтому приведенное определение бесконечного множества не зависит от конструктивности операций распознавания свойств бесконечных множеств. Следовательно, свойства бесконечных множеств могут не быть конструктивными, но это не влияет на возможность распознавания бесконечных множеств среди произвольных множеств. Тогда вполне допустимо наделять бесконечные множества неконструктивными свойствами, т. е. такими свойствами, относительно которых нельзя алгорифмически решить вопрос, принадлежит ли произвольный объект данному множеству. Тем более нельзя решить, принадлежит или не принадлежит этот объект данному множеству.

«Наивная» теория множеств принимает эту задачу за решенную независимо от существования алгорифмов для ее решения. Предполагается, что относительно произвольной области объектов, которую можно рассматривать как универсальное множество $U$, множества $M$, $M \subseteq U$, и любого элемента $x$ множества $U$ можно решить: $x \in M$ или $x \notin M$. Алгорифмически эта проблема разрешима лишь для рекурсивных множеств. Допущение о разрешимости этой проблемы для произвольных множеств означает наделение всех множеств свойствами рекурсивных множеств. Назовем данное предположение относительно свойств произвольных множеств гипотезой рекурсивности, а сами эти множества — гипотетически рекурсивными. Принимая гипотезу рекурсивности произвольных множеств, можно утверждать, что все средства классического исчисления высказываний допустимы для рассуждений о произвольных множествах.

Более того, актуальный характер произвольных бесконечных множеств позволяет сделать вывод о том, что кванторы $\forall$ и $\exists$ не нарушают гипотетической рекурсивности.

Прежде всего напомним, почему кванторы $\forall$ и $\exists$ не сохраняют рекурсивности предикатов, задающих рекурсивные множества. Пусть предикат $P(x)$, определенный на множестве $U$, рекурсивен и задает множество $P \subseteq U$. Это значит, что для произвольного $x_i$ можно алгорифмически определить $x_i \in P$ либо $x_i \notin P$. Пусть $P(x_i)$ истинно. Тогда вопрос, верно ли, что $x_i \in P$, решается алгорифмически. Всегда можно полагать, что $P(x_i) = \forall y\, Q(x_i, y)$. Однако алгорифма для определения истинности формулы $\forall y\, Q(x_i, y)$ может не существовать, если для этого требуется вычислить бесконечное число значений предиката $Q$:

$$Q(x_i, 0),\ Q(x_i, 1), \ldots,\ Q(x_i, n), \ldots$$

Значит, когда формула $\forall y Q(x_i, y)$ истинна, процесс применения алгорифма при вычислении значений истинности предиката $Q$ никогда не закончится, а стало быть, истинность нельзя алгорифмически определить.

Допустим теперь, что $P(x_i) = \exists y Q(x_i, y)$ и что формула $\exists y Q(x_i, y)$ ложна. Это значит, что не существует такого $y$, что $Q(x_i, y)$ истинна. Тогда снова может не существовать алгорифма для определения ложности формулы $\exists y Q(x_i, y)$, ибо процесс применения такого алгорифма будет представлять бесконечную последовательность $Q(x_i, 0), \ldots, Q(x_i, n), \ldots$ и никогда не закончится.

Поэтому если $P(x)$ — рекурсивный предикат, то предикаты $\forall y Q(x, y)$ и $\exists y Q(x, y)$ могут и не быть рекурсивными. Но с точки зрения абстракции актуальной бесконечности можно мыслить завершенным (правда, неизвестно, каким способом) любое множество, в том числе и множество актов проверок истинностного значения формул $Q(x_i, 0), \ldots, Q(x_i, n), \ldots$. Поэтому если предикат $P(x)$ гипотетически рекурсивен, то гипотетически рекурсивны и предикаты $\forall y Q(x, y)$ и $\exists y Q(x, y)$.

Тем самым оправдывается применение к рассуждениям о произвольных множествах всей совокупности логических средств классической логики, т. е. классического исчисления предикатов. Вопрос состоит только в том, насколько и где оправданы все упомянутые гипотезы о свойствах множеств. Очевидно, что там, где необходимы конструктивные рассуждения, где необходима конструктивная семантика, предполагающая алгорифмическое решение вопроса об истинности значений суждений, все эти предположения о свойствах множеств заведомо непригодны.

С другой стороны, в классической математике и ее приложениях множества, о которых ведутся рассуждения, наделяются гипотетическими свойствами рекурсивности, а классическая логика используется в полном объеме.

Примером может служить определение действительного числа по Дедекинду ([16]), предполагающее совокупность рациональных чисел, данную сразу всеми своими элементами, предполагающее возможность о каждом числе судить, принадлежит оно данному классу или нет.

Там, где можно смириться с невозможностью алгорифмически решить ту или иную проблему, можно допускать при рассуждениях вышеупомянутые гипотезы о свойствах множеств, применять в рассуждениях классическую логику, но при этом не требовать непременного получения конструктивных результатов. Таковых может и не быть.

Например, с помощью явно неконструктивных рассуждений, предполагающих метод бесконечного дихотомического деления, можно доказать теорему Больцано — Коши ([17], стр. 123—130). Эта теорема говорит о том, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, то существует точка $c$, $a < c < b$, такая, что $f(c)=0$. Алгорифма для нахождения этой точки $c$ не существует. Результат, таким образом, не конструктивен.

Подобных результатов в классической математике немало. С конструктивной точки зрения такие результаты нельзя считать истинными утверждениями, ибо само понятие истинности связывается с алгорифмической вычислимостью.

Однако возникает вопрос, бесполезны ли данные результаты для математики. Ведь если нет общего метода алгорифмического решения проблемы Больцано — Коши, то ее неконструктивное решение полезно по крайней мере в эвристическом плане. В каждом конкретном случае точку $c$, такую, что $f(c) = 0$, можно хотя бы приблизительно вычислить. Неконструктивные методы рассуждений для определенных целей и при определенных условиях так же оправданы, как и конструктивные.

С проблемой актуальной бесконечности связано много трудностей, носящих логический и гносеологический характер. В истории математики эти трудности возникали при попытках дать математическое описание движения, при попытках дать интерпретацию терминам дифференциального исчисления и т. д. На этих проблемах здесь мы останавливаться не будем, так как они будут специально исследованы в § 4 гл. I и § 1 гл. II.

## § 3. Абстракции «фактической» осуществимости и «фактической» бесконечности

Наряду с понятиями потенциальной и актуальной бесконечности правомерно ввести понятие, которое можно было бы назвать «фактической» бесконечностью. Это понятие бесконечности связано с абстракцией «фактической» осуществимости и с понятием «фактически» неосуществимого объекта. Целесообразность введения подобных понятий диктуется тем, что абстракции потенциальной и «абсолютной» осуществимости, а также абстракции потенциальной и актуальной бесконечности являются очень сильными идеализациями, предполагающими по меньшей мере отвлечение от какой бы то ни было ограниченности наших практических возможностей. Однако в решении некоторых научно-практических задач, возникающих, например, в кибернетике, требуется ставить определенные границы осуществимости, учитывать ограниченность наших возможностей хотя бы довольно неопределенными рамками.

Одну из попыток решения этой проблемы и представляет введение абстракции «фактической» осуществимости, которая, вообще говоря, тоже является в какой-то мере идеализацией реальных возможностей в построении объекта. На основе этой абстракции мы вводим понятие бесконечного множества, которое сильно отличается от понятия бесконечности в классической общей теории множеств. Потенциально бесконечные последовательности и актуально бесконечные множества имеют одно общее свойство, которое состоит в том, что члены этих множеств нельзя пересчитать. Такое же свойство имеют множества, которые можно назвать «фактически» неосуществимыми и в этом смысле «фактически» бесконечными, хотя пересчитать элементы этих множеств нельзя совсем не по тем причинам, по которым нельзя пересчитать элементы потенциально бесконечной последовательности или актуально бесконечного ряда.

В настоящее время в нашей и зарубежной литературе по вопросам кибернетики и обоснования математики выступают представители нового направления, которое ставит своей задачей отказаться (там, где это возможно) от абстракции потенциальной осуществимости. Одним из представителей этого направления является голландский математик ван Данциг. Сторонники отказа от абстракции потенциальной осуществимости именуются в нашей литературе ультраинтуиционистами. Судя по доступным нам работам представителей данного направления ([18], [19], [20]), термин «ультраинтуиционизм» означает концепцию, допускающую развитие теорий с позиции абстракции «фактической» осуществимости. Примером практического осуществления этой программы являются работы [19], [20] и [21].

Вместо абстракции потенциальной осуществимости в этих работах допускается более ограниченная абстракция, которая не получила еще устойчивого названия. В работе [20] эта абстракция порой называется «фактической» осуществимостью. Данного названия мы и будем придерживаться. Насколько это название охватывает существо концепции нового понимания осуществимости, будет видно в дальнейшем.

Какие-либо философские концепции, связанные с ультраинтуиционистским пониманием осуществимости, нам не известны. Анализ различных абстракций осуществимости математических и логических объектов показывает, что все эти концепции в итоге подтверждают диалектико-материалистический тезис о конкретности истины. Каждая из абстракций возникла под влиянием необходимости решения каких-то научно-практических задач. Ультраинтуиционистская концепция своим появлением во многом обязана тому факту, что непротиворечивость аксиоматической теории множеств не может быть доказана средствами, допустимыми с точки зрения абстракции потенциальной осуществимости, ибо они формализуются в данной теории. Ни одну из абстракций осуществимости нельзя считать пригодной для решения всех задач, стоящих перед кибернетикой, логикой, математикой и другими абстрактными науками. Конкретная ситуация, таким образом, требует конкретного подхода. На эту сторону дела мы и обратим особое внимание.

Исходя из привычных для нас представлений о конечном и бесконечном, даже при всем их многообразии, трудно судить о различии между конечным и бесконечным в ультраинтуиционистском понимании этих терминов (тем более, что сами ультраинтуиционисты в явном виде эти понятия обычно не употребляют).

Ультраинтуиционистское понимание осуществимости можно использовать для определения понятий конечного и бесконечного множеств так же, как это возможно сделать, исходя из абстракций «абсолютной» или потенциальной осуществимости. При этом понимание конечного и бесконечного будет значительно отличаться от их понимания как с классической, так и с конструктивной точек зрения.

Те понятия о конечном и бесконечном, которые основаны на абстракции «фактической» осуществимости, мы будем называть «фактически» конечным и «фактически» бесконечным. Слово «фактически» при этом нельзя интерпретировать как «имеющееся в объективной действительности». «Фактическая» осуществимость, «фактическая» бесконечность и т. п. являются математическими абстракциями.

Вероятно, сейчас еще трудно судить о том, насколько плодотворно ультраинтуиционистское направление в математике. Нам известно лишь то, что если принять ультраинтуиционистскую гипотезу об осуществимости, то можно доказать непротиворечивость теории типов [19] и теории множеств Цермело — Френкеля [20]. Известно и то, что какими-либо иными средствами этого сделать не удается. Однако такое доказательство непротиворечивости остается относительным, оно требует принятия постулата об осуществимости, выдвигаемого ультраинтуиционистами. Обоснование же правомерности этого постулата встречает большие трудности как в силу его непривычности, так и в силу более веских причин. Дело в том, что последовательное проведение ультраинтуиционистской концепции требует отказа от абстракции потенциальной осуществимости и от правила полной математической индукции. Естественно, что такой отказ парализовал бы всю математику и логику. Поэтому приверженцы этой концепции, не отказываясь полностью от потенциальной осуществимости, подробно оговаривают, в каких случаях можно пользоваться абстракцией потенциальной осуществимости, а в каких случаях следует использовать только одну абстракцию «фактической» осуществимости.

Сам по себе этот факт для логики интересен уже потому, что в одной и той же теории употребляются отрицающие друг друга принципы, но по отношению к разным объектам. Мы считаем необходимым осветить некоторые аспекты проблемы «фактической» осуществимости.

**Абстракция «фактической» осуществимости и ее употребление в теоретической кибернетике.** Абстракция «фактической» осуществимости, так же как и абстракция потенциальной осуществимости, предполагает, что если есть эффективный процесс построения одних объектов некоторого множества из других объектов, то, при наличии исходных объектов, за каждым шагом построения может быть осуществлен следующий шаг. Но вместе с тем, в отличие от абстракции потенциальной осуществимости, которая отвлекается от каких-либо фиксированных границ в осуществлении количества шагов построения, с введением абстракции «фактической» осуществимости постулируется существование неосуществимых объектов, которые не могут возникнуть в ходе данного процесса построения.

Абстракция «ф а к т и ч е с к о й» о с у щ е с т в и м о с т и оставляет некоторые предпосылки, основанные на абстракции потенциальной осуществимости (предпосылки осуществимости исходного шага построения и возможности осуществления вслед за каким-либо шагом еще одного шага), и вводит другие предпосылки (предположение о существовании неосуществимого шага построения).

Обозначая предикат «осуществим *n*-й объект со свойством $\mathfrak{A}$ на *n*-м шаге построения» символом $O_{\mathfrak{A}}(n)$, все эти допущения можно записать символически следующим образом:

$$(8) \qquad O_{\mathfrak{A}}(0).$$

Смысл этого выражения состоит в том, что исходные объекты, т. е. объекты нулевого шага построения, предполагаются «фактически» осуществимыми:

$$(9) \qquad (O_{\mathfrak{A}}(n) \supset O_{\mathfrak{A}}(n+1)).$$

Смысл данного предложения следующий: если «фактически» осуществим *n*-й объект, т. е. объект *n*-го шага построения, то «фактически» осуществим объект $n+1$-й, т. е. объект, возникающий на $n+1$ шаге построения:

$$(10)\quad \exists m \neg O_{\text{ф}}(m).$$

Смысл этой формулы заключается в утверждении существования «фактически» неосуществимого $m$-го объекта.

На первый взгляд эта абстракция кажется противоречивой, так как выражения (9) и (10), являющиеся ее описанием, по видимости, постулируют несовместимые свойства. Причина этого кроется в том, что мы привыкли рассуждать с помощью принципа полной математической индукции:

$$(11)\quad (P(0) \mathbin{\&} (P(n) \supset P(n+1)) \supset \forall m P(m)),$$

означающего, что если свойство $P$ присуще исходному объекту 0 и из того, что оно присуще произвольному предмету $n$, следует, что оно присуще и предмету $n+1$, то можно заключить, что оно присуще и всем предметам. На основе принципа (11) из предложений (8) и (9) выводимо предложение

$$(12)\quad \forall m\, O_{\text{ф}}(m),$$

являющееся отрицанием предложения (10).

Выход из данной ситуации изыскивается за счет принципиальной невозможности точного описания границ, отделяющих осуществимое от неосуществимого. Мыслить «фактически» неосуществимые объекты все же можно без противоречий. Ввиду того, что в общем случае неясно условие (10), трудно сколько-нибудь определенно перечислить те факторы, от которых абстрагируется «фактическая» осуществимость, как это можно было сделать относительно абстракции потенциальной осуществимости.

Однако можно показать, что существует такая область предметов, в которой аксиома (11) ложна, ибо посылка этой аксиомы $(P(0) \mathbin{\&} (P(n) \supset P(n+1)))$ будет в этой области истинной, а заключение $\forall m P(m)$ — ложным. Это нетрудно сделать, если выбрать область объектов, обладающих некоторыми свойствами, в которой справедливо предложение, выражающее так называемый «парадокс кучи». Чтобы это показать, обозначим свойство «не быть кучей» буквой $Q$. Тогда утверждения $Q(0)$ и $(Q(n) \supset Q(n+1))$ будут истинными в этой области для всех $n$, а утверждение $\forall m Q(m)$ будет ложным. Иначе говоря, истинными будут утверждения о том, что количество зерен, равное нулю, не будет кучей и что если некоторое количество зерен не является кучей, то прибавление еще одного зерна не образует кучу зерен. Но утверждение о том, что любое количество зерен не является кучей, очевидно, ложно. Тогда истинным будет предложение $\exists m \neg Q(m)$, т. е. истинно утверждение о существовании такого количества зерен, которое образует кучу. Область объектов с определенными на ней предикатами (выражениями, обозначающими свойства и отношения), в которой истинны предложения (8), (9), (10), назовем неиндукционной областью. Характерной особенностью этих областей является то, что осуществимые и неосуществимые объекты не имеют «четкой» границы, их разделяющей. Очевидно, что в неиндукционной области аксиома математической индукции (11) ложна.

Таким образом, кажущееся противоречие, связанное с гипотезой «фактической» осуществимости, разрешается на основе диалектического принципа конкретности истины. А именно: предложения (8), (9) и (10) истинны и совместимы относительно неиндукционных областей, а предложение (11) истинно в индукционной области, но ложно в неиндукционной. Неиндукционные области (множества) можно строить для логических и математических целей. Правда, при этом трудно проводить точные рассуждения относительно таких областей, в результате чего полностью отказаться от гипотезы потенциальной осуществимости и от аксиомы полной математической индукции в настоящее время не представляется возможным. Однако частичный отказ от этих принципов не только возможен, но и практически полезен.

Некоторые ученые, например А. Тьюринг [22] и А. Н. Колмогоров [23], считают, что в будущем такой раздел теоретической кибернетики, как теория автоматов, должен базироваться на предпосылках практической осуществимости, которая по существу своему в некотором смысле близка к «фактической» осуществимости. Тьюринг это обосновывает, во-первых, необходимостью учета практически допустимых отрезков времени, в течение которых могут быть получены результаты, во-вторых, необходимостью повышения надежности логических автоматов. Отсюда следует, что логика автоматов будущего должна учитывать действительно осуществимую длину цепей логических операций. При этом предполагается, что на практически необходимую точность результатов этих операций не должно влиять наличие погрешностей в некоторых операциях.

А. Н. Колмогоров, говоря о диалектике конечного [23], полагает, что теория должна учитывать качественные переходы, которые могут быть не только в области бесконечного, но и в области конечного, ибо предположение о том, что переход от $n$-го шага процесса к $n+1$-му шагу никогда не меняет качества, не всегда приемлемо.

Работа В. А. Козмидиади [21] тоже примыкает по своим идеям к проблемам осуществимости, разрабатываемым А. С. Есениным-Вольпиным [19], как об этом говорит сам автор, и согласуется со взглядами А. Тьюринга на будущее теории автоматов. Действительно, в работе В. А. Козмидиади речь идет о конечно перечислимых и конечно разрешимых множествах. При этом конечно перечислимое множество, например перечислимое автоматом с $n$ состояниями, может не оказаться конечно разрешимым множеством, если оно разрешимо автоматом с $2^n$ состояниями и если $2^n$ будет практически неосуществимым числом. Между конечной перечислимостью и конечной разрешимостью, таким образом, имеется качественный (с точки зрения автоматной осуществимости) скачок.

**Абстракция «фактической» бесконечности.** На основе абстракции «фактической» осуществимости можно постулировать существование некоторого множества объектов, состоящего из «фактически» осуществимых объектов. Отсюда мы можем ввести понятие о «фактической» бесконечности.

Для характеристики понятия «фактической» бесконечности рассмотрим множество $\{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots, \mathfrak{A}_m\}$, где $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ суть «фактически» осуществимые объекты, а $\mathfrak{A}_m$ — «фактически» неосуществимый объект. В этой области выполняются постулаты (8) — (10), и поэтому она является неиндукционной. Очевидно, что завершение пересчета объектов данной области невозможно ввиду постулата (9). Кроме того, осуществимость или неосуществимость объектов этой области определяется предположениями «фактической» осуществимости. Исходя из этого, назовем данную область «фактически» бесконечным множеством («ф а к т и ч е с к о й» б е с к о н е ч н о с т ь ю) и выясним его особенности.

Допустим, что это множество состоит только из «фактически» осуществимых и «фактически» неосуществимых объектов. Тогда должен существовать первый из «фактически» неосуществимых объектов, который мы обозначим индексом $i$. Предшествующий ему объект с индексом $i - 1$ будет уже «фактически» осуществимым. Согласно постулату (9), из этого следует, что объект с индексом $i$ тоже «фактически» осуществим. Таким образом, одному и тому же объекту приписывается два несовместимых свойства, что ведет к противоречию (так называемому парадоксу Ван Данцига). Разрешение данного противоречия состоит в допущении существования в «фактически» бесконечном множестве таких объектов, которые не являются ни «фактически» осуществимыми, ни «фактически» неосуществимыми. Допущение приемлемо, ибо не противоречит постулатам (8) — (10).

Так как данное множество содержит как «фактически» осуществимые, так и «фактически» неосуществимые объекты, то оно (с точки зрения абстракции «фактической» осуществимости) само является неосуществимым объектом. А это одно из свойств, традиционно характеризующих бесконечность (бесконечность всегда ассоциировалась с неосуществимостью, хотя и не ясно, как понимаемой).

Ультраинтуиционисты говорят о замене понятия бесконечного понятием неосуществимого. На самом деле это означает замену абстракции потенциальной бесконечности абстракцией «фактической» бесконечности, основанной на абстракции «фактической» осуществимости.

Ультраинтуиционисты не принимают классическую логику, ибо не все логические средства этой логики могут рассматриваться как логические законы для рассуждений о «фактически» конечных и бесконечных множествах. На этом вопросе остановимся подробнее.

**Логические проблемы абстракции «фактической» осуществимости и бесконечности.** Прежде всего рассмотрим различия в понимании истинности суждений, которые обнаруживаются с точки зрения абстракций «абсолютной», «потенциальной» и «фактической» осуществимости. С точки зрения «классика», принимающего абстракцию «абсолютной» осуществимости, понятие истинности применимо к высказываниям типа $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$ и $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$, где $x$ есть переменная для любого непустого множества предметов, мыслимого как актуальное.

Основание для этого «классик» видит в том, что при истолковании данных формул как истинных можно завершить исследование истинности бесконечного множества предложений $\mathfrak{A}(x_0^0)$, $\mathfrak{A}(x_1^0), \ldots,$ $\mathfrak{A}(x_n^0), \ldots,$ где $x_n^0$ означает индивидуальный предмет из рассматриваемой области предметов. «Классика» не будет смущать даже то, что эта область, к примеру, мощности $\aleph_\omega$ или $\aleph_\Omega$, или еще большей мощности. С точки зрения абстракции «абсолютной» осуществимости возможна проверка истинности даже таких множеств предложений.

Конструктивист, принимающий абстракцию потенциальной осуществимости, отрицает возможность закончить проверку истинности какого бы то ни было актуально бесконечного множества предложений, так как этого не позволяет сделать абстракция потенциальной осуществимости, а абстракцию «абсолютной» осуществимости он не принимает. Конструктивист признает возможность проверки, хотя и сколь угодно большого, но конечного числа предложений, что обосновано принятием гипотезы потенциальной осуществимости. Но если проверка бесконечного множества предложений вида $\mathfrak{A}(x_n^0)$, где $n = \{0, 1, 2, ...\}$, неосуществима, то не имеет смысла говорить об истинности утверждений $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$ и $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$, если истинность этих высказываний рассматривать как результат возможности завершения процесса проверки бесконечного множества предложений вида $\mathfrak{A}(x_n^0)$. А так как возможность проверки сколь угодно большого конечного множества предложений, с точки зрения конструктивиста, осуществима, то понятие истинности применимо к предложениям вида $\forall x_{x\leqslant n}\, \mathfrak{A}(x)$ и $\exists x_{x\leqslant n}\, \mathfrak{A}(x)$, где $n$ — любое конечное число. Истинность предложения $\forall x_{x\leqslant n}\, \mathfrak{A}(x)$ означает истинность предложений $\mathfrak{A}(x_0^0)$, $\mathfrak{A}(x_1^0)$, $\mathfrak{A}(x_2^0)$,..., $\mathfrak{A}(x_n^0)$, которая может быть установлена алгорифмическим способом. Мы видим, что с изменением взгляда на осуществимость меняется и семантика.

С точки зрения «фактической» осуществимости конструктивистская концепция обоснования истинности предложений $\forall x_{x\leqslant n}\, \mathfrak{A}(x)$, $\exists x_{x\leqslant n}\, \mathfrak{A}(x)$ не оправдана. «Фактически» нельзя проверить не только сколь угодно большое, но даже просто очень большое количество предложений. Тогда бессмысленно говорить об истинности предложения $\mathfrak{A}x_{x\leqslant n}\, \mathfrak{A}(x)$, если $n$ таково, что проверка предложений $\mathfrak{A}(x_0^0)$, $(\mathfrak{A}x_1^0)$,..., $\mathfrak{A}(x_n^0)$ превышает все «фактические» возможности. Ультраинтуиционист, например, сомневается в осмысленности утверждений вида $\forall x_{x\leqslant 10^{12}}\, \mathfrak{A}(x)$, ибо невозможно совершить $10^{12}$ актов проверки. Для ультраинтуициониста предложения вида $\forall x\mathfrak{A}(x)$ или $\exists x\mathfrak{A}(x)$ могут быть осмысленными лишь в том случае, если $x$ есть переменная для «фактически» осуществимых объектов. Истинность только таких предложений можно обосновать.

Понятия осуществимости связаны со смыслом кванторов и с понятием истины. Установление истинности предложений с кванторами общности и существования основано на принципе верификации. Абстракция абсолютной осуществимости позволяет верифицировать актуально бесконечное множество предложений вида $\mathfrak{A}(x_n^0)$, где $n = \{0, 1, \ldots, n\}$, и установить, истинны или ложны предложения вида $\forall x\mathfrak{A}(x)$ и $\exists x\mathfrak{A}(x)$. Абстракция потенциальной осуществимости не дает возможности провести такую операцию, но дает возможность верифицировать любое конечное число предложений вида $\mathfrak{A}(x_n^0)$ и установить истинность предложений вида $\forall x_{x\leqslant n}\mathfrak{A}(x)$ и $\exists x_{x\leqslant n}\mathfrak{A}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Абстракция «фактической» осуществимости не позволяет проделать обе вышеизложенные операции, но позволяет верифицировать «фактически» осуществимое количество предложений вида $\mathfrak{A}(x_j^0)$, где $j$ есть переменная для «фактически» осуществимых чисел, и установить истинность предложений вида $\forall x\mathfrak{A}(x)$, $\exists x\mathfrak{A}(x)$, где $x$ — переменная для «фактически» осуществимых объектов. Иначе говоря, $\forall x\mathfrak{A}(x)$ понимается так: «для всякого осуществимого $x$ $\mathfrak{A}(x)$»; $\exists x\mathfrak{A}(x)$ понимается так: «для некоторого осуществимого $x$ $\mathfrak{A}(x)$».

Различные понятия осуществимости связаны также и с логическим синтаксисом. От принятия той или иной концепции осуществимости может зависеть принятие той или иной семантики, о чем уже было сказано. А от семантической концепции может зависеть принятие той или иной синтаксической системы.

В самом деле, классически не только осмысленна, но и истинна формула $(\exists xF(x) \vee \forall x \neg F(x))$, где $x$ — переменная для объектов произвольных множеств. Обоснование ее истинности основано на предпосылке «абсолютной» осуществимости, на основе которой проверка актуально бесконечного множества предложений является осуществимой.

Стало быть, синтаксическая система классической логики должна быть такова, чтобы в ней была выводима данная формула, выражающая закон исключенного третьего.

Как мы уже видели, с точки зрения конструктивизма, а тем более ультраинтуиционизма, не принимающих абстракции абсолютной осуществимости, истинность этой формулы не может быть обоснована. Поэтому конструктивная и ультраинтуиционистская логики в синтаксическом отношении должны представлять такие системы, в которых данная формула не была бы выводима.

Ультраинтуиционизм принимает конструктивное исчисление предикатов, т. е. берет конструктивный логический синтаксис, но связывает его уже с новой, ультраинтуиционистски обоснованной семантикой. Ультраинтуиционистские предпосылки не позволяют пользоваться принципом полной математической индукции для определений и доказательств, так как этот принцип, основанный на абстракции потенциальной осуществимости, не приемлем с точки зрения абстракции «фактической» осуществимости. Если же какую-либо теорию строить на ультраинтуиционистских предпосылках, то там, где эти предпосылки применяются, нельзя уже использовать понятия, основанные на принципе полной математической индукции, иначе получатся противоречия.

Пусть, например, построена на ультраинтуиционистских предпосылках какая-то теория, включающая понятие натурального числа. С ультраинтуиционистской точки зрения число $10^{10^{10}}$ построить невозможно, если под построением мыслить повторное присоединение единицы к положенной в основу единице. В таком случае, утверждая, что невозможно построить натуральные числа такие же большие, как $10^{10^{10}}$ ([18], стр. 274), мы приходим к противоречию, ибо $10^{10^{10}}$ в этом утверждении рассматривается как натуральное число. Получается, что, с одной стороны, $10^{10^{10}}$ есть натуральное число, но, с другой стороны, не есть натуральное число, ибо его нельзя построить.

Причина противоречия — в том, что в нашей теории число $10^{10^{10}}$ не является натуральным «фактически» осуществимым числом, ибо оно «фактически» неосуществимо, а мы его тем не менее называем натуральным числом, пользуясь определением натурального числа, основанным на аксиоме полной индукции, предполагающей потенциальную осуществимость. В одном случае под натуральным числом понимается «фактически» осуществимая конструкция, а в другом случае — потенциально осуществимая конструкция, в одном случае понятие натурального числа базируется на гипотезе «фактической» осуществимости, а в другом случае — на гипотезе потенциальной осуществимости. И если наша теория принимает понятие натурального числа в ультраинтуиционистском смысле, то нельзя употреблять его в конструктивистском смысле, ибо одно понятие противоречит другому, так как они основаны на несовместимых гипотезах.

Противоречие получилось потому, что объект $10^{10^{10}}$ мы рассматриваем в одно и то же время и с точки зрения абстракции «фактической» осуществимости, и с точки зрения абстракции потенциальной осуществимости. Если же использовать в данной теории обе указанные абстракции, но одновременно не применять их по отношению к одному и тому же объекту, то никаких противоречий не возникает. Такая ситуация как раз имеет место в ультраинтуиционистском обосновании теории множеств. Понятие «фактической» осуществимости относится к категории таких же неточных понятий, как «утро», «ребенок» и т. п., границы которых весьма расплывчаты. Если мы определяем границы таких понятий, то весьма условно. Человек считается ребенком до момента получения паспорта, когда ему исполнится 16 лет. После этого момента он уже взрослый, хотя по существу за один день ничего не меняется.

Спрашивается, можно ли определить какую-либо точную границу между «фактически» осуществимым и неосуществимым? Оказывается, этого сделать нельзя по принципиальным соображениям. Допустим, что такая граница определена и она разделяет осуществимые числа и неосуществимые. Эта граница может быть задана либо указанием последнего осуществимого числа, либо указанием первого неосуществимого числа. Для определенности возьмем последний случай. Пусть $x$ будет первым неосуществимым числом. Тогда $x - 1$ будет являться числом осуществимым. Но согласно предпосылке «фактической» осуществимости, если осуществимо $n$, то осуществимо и $n + 1$. В таком случае число $(x - 1) + 1$, равное $x$, осуществимо. Получилось противоречие: $x$ осуществимо и $x$ неосуществимо одновременно.

Принятие гипотезы об осуществимости следующего шага и гипотезы об осуществимости первого шага приводит к утверждению о том, что среди неосуществимых чисел нет наименьшего. Отсюда следует, что точная граница осуществимого и неосуществимого проведена быть не может, эта граница неопределенна. Между осуществимыми и неосуществимыми числами (в общем случае—просто какими-то объектами) лежат числа, которые не могут быть ни теми, ни другими. Поэтому неверно будет утверждать относительно всякого объекта, что он либо осуществим, либо неосуществим. Тогда нельзя сказать, что формула $A \vee \neg A$ будет тождественно истинной.

Действительно, высказывания об объектах, не являющихся ни «фактически» осуществимыми, ни «фактически» неосуществимыми, не могут быть оценены как истинные или ложные. Поэтому появляется третье значение высказываний — «неопределенность» относительно абстракции «фактической» осуществимости», которую мы назовем «Ф-неопределенностью». Если $A$ имеет значение «Ф-неопределенно», то $\neg A$ тоже имеет значение «Ф-неопределенно». При этом вся формула $A \vee \neg A$ имеет значение «Ф-неопределенно» и не может быть принята в качестве закона ультраинтуиционистской логики.

Если речь идет о процессе счета человеком, то можно сказать, что счет до 100 фактически осуществим, счет до $10^{12}$ неосуществим, а относительно возможности досчитать до $10^7$ вопрос сомнителен, т. е. Ф-неопределенен. Если счет будет вести машина, то рамки осуществимого и неосуществимого изменятся. Для каждого рассуждения слово «осуществимо» имеет свой особый смысл, так же как и слово «неосуществимо».

«Понятие осуществимого числа (или слова) безусловно подвержено эволюции, хотя при возможности достаточно «смелого» понимания осуществимости эта эволюция не должна влиять на доступные нам рассуждения» ([20], стр. 228).

«Фактическая» осуществимость является некоторой идеализацией, огрублением тех процессов, которые имеют место на самом деле. Идеализация эта заключается в абстрагировании от конкретных материальных возможностей осуществления, в абстрагировании от их эволюции. Но данная идеализация слабее абстракции потенциальной осуществимости абстрагирующейся вообще от всяких реальных возможностей. Отсутствие четкой границы между осуществимым и неосуществимым является причиной, по которой закон исключенного третьего не приемлем для ультраинтуиционистов. Сама причина этого факта кроется в предпосылках «фактической» осуществимости. Критерий «фактической» осуществимости весьма неопределенен.

Основанием для утверждений об осуществимости или неосуществимости некоторые ультраинтуиционисты предлагают считать «полную уверенность» ([20], стр. 228). На такой основе, естественно, нельзя установить какого-либо общего критерия осуществимости или неосуществимости, но в каждом конкретном случае его найти можно так же, как мы находим критерий для определения того, «много» или «мало» чего-то имеется, чего-то сделано и т. д. в каждом частном случае. Тут особенность заключается в том, что абстракция «фактической» осуществимости хотя и отвлекается от возможностей данного человека, в данный момент времени и т. д., но не слишком отвлекается от каких-то средних возможностей осуществления каждого конкретного процесса.

**Соотношение теорий, допускающих различные абстракции осуществимости.** Нами рассмотрены три абстракции осуществимости. В большинстве случаев научные теории в качестве предпосылок принимают не одну какую-либо из этих абстракций. Только интуиционистские и конструктивные направления в математике и логике принимают лишь одну-единственную абстракцию потенциальной осуществимости.

Классическая математика и логика строятся на предпосылках как абсолютной, так и потенциальной осуществимости. Ультраинтуиционистское обоснование теории множеств предполагает не только предпосылку фактической осуществимости, но в некоторых вопросах опирается на абстракцию потенциальной осуществимости.

В конкретном исследовании (например, в работе [20], § 5) всегда точно указывается, какие объекты считаются осуществимыми на основе абстракции потенциальной осуществимости, а какие — на основе абстракции «фактической» осуществимости. К последним объектам в данной работе относится понимание предложений вида $\forall x\mathfrak{A}(x)$ и $\exists x\mathfrak{A}(x)$.

Гипотезы об абсолютной, потенциальной и «фактической» осуществимости во всех теориях тесно связаны с другими абстракциями (понятиями), из которых особенно важным является понятие объекта. Такими объектами могут быть конструктивные объекты или «объекты произвольной природы» или еще какие-нибудь. Все это осложняет рассмотрение познавательного значения различных абстракций осуществимости и основанных на них различных форм бесконечности.

Как мы уже видели, любая из абстракций осуществимости является идеализацией, отвлечением от каких-то сторон изучаемых процессов и сильным преувеличением других сторон. Так что решение какого-либо вопроса на основе данных абстракций не может рассматриваться как абсолютная истина, а может лишь считаться решением с какой-то степенью приближенности, с какой-то степенью огрубления.

В этом смысле не может быть и абсолютного, раз навсегда данного обоснования математики, какую бы гипотезу об осуществимости она ни принимала.

Между прочим, научный анализ предпосылок об осуществимости настолько ярко демонстрирует это положение, что к такому, по своему существу диалектическому выводу приходят математики, не являющиеся диалектическими материалистами. Например, ван Данциг пишет: «За немногими исключениями — такими, как Борель (E. Borel), Фреше (M. Fréchet) и Маннури (G. Mannoury),— большинство математиков, логиков и философов верят в возможность получения абсолютно неопровержимого „обоснования" математики. Эта вера должна быть охарактеризована как иллюзия. В особенности интуиционистская математика не может рассматриваться как абсолютно „точная", хотя можно сказать, что она „более точна, чем классическая математика"» ([18], стр. 277).

Обоснованность самих предпосылок об осуществимости относительна, поэтому относительна познавательная ценность той или иной формы бесконечного. Каждая из предпосылок об осуществимости играет свою роль в науке.

Примером проблемы, которая решается (в случае возможности построения модели) ультраинтуиционистски, но не решается ни классически, ни конструктивно, может служить проблема доказательства непротиворечивости системы аксиом Цермело — Френкеля для теории множеств (такое доказательство дано в [19]). Вероятно, никогда не оправдается стремление решить все проблемы с позиций какой-либо одной гипотезы об осуществимости. Рассмотрев основные проблемы учения о бесконечности, основания которых заключены в анализе гипотез осуществимости, можно перейти к исследованию учения о бесконечном в его историческом аспекте.

## § 4. Исторический аспект абстракций осуществимости и бесконечности

В § 1 и 2 говорилось о том, что в основе каждой абстракции бесконечности лежит определенная абстракция осуществимости. В тех разделах современной науки, которые пользуются абстракциями бесконечности, зачастую даже не говорится в явном виде о принимаемой форме бесконечности, а указывается лишь та абстракция осуществимости, которая является допустимой. Этого оказывается достаточным для того, чтобы судить о том, какая форма бесконечности может быть приемлемой. Так, например, при построении теории нормальных алгорифмов ([8], [24]), конструктивного математического анализа, конструктивной математической логики в числе допустимых абстракций указывается абстракция потенциальной осуществимости; эта же абстракция используется (хотя это явно обычно и не оговаривается) во многих построениях теоретической кибернетики (теория абстрактных автоматов, теория логических сетей, теория формальных нейронных сетей и т. д.). При допущении абстракции потенциальной осуществимости в этих теориях становится допустимым и понятие потенциальной бесконечности, хотя последнее не всегда используется.

При ультраинтуиционистском обосновании теории множеств ([19], [20]) в числе исходных принципов фигурирует абстракция «фактической» осуществимости, на основе которой создается особое понятие о бесконечности.

Наоборот, в некоторых других отраслях знания с самого начала явным образом описываются принимаемые формы бесконечности, но не исследуется вопрос о лежащих в основе этих понятий абстракций осуществимости. Примерами могут служить различные построения классического математического анализа ([17], [25]) и теории множеств ([15], [26]) и т. д.

Как уже было показано, между понятиями о бесконечности и абстракциями осуществимости имеется взаимосвязь. Этот факт мы будем иметь в виду при рассмотрении различных направлений в учении о бесконечном.

На протяжении почти всей истории этих направлений различные формы бесконечности подвергались критике главным образом не в результате анализа основ этих абстракций, а в результате анализа тех следствий, к которым приводило использование данных абстракций. Существенное место среди таких следствий занимали логические и гносеологические трудности, возникающие в науках, пользующихся абстракциями бесконечности. Лишь в XIX в. большое внимание стало уделяться исследованию предпосылок (гипотез), лежащих в основании той или иной формы бесконечности, и в связи с этим стал проводиться анализ абстракций осуществимости.

Начиная с интуиционистов при обосновании правомерности или неправомерности использования какой-либо абстракции бесконечности главное место занимают проблемы анализа абстракций осуществимости.

**Проблемы бесконечности в древнегреческой науке доаристотелевского периода.** Различные направления в учении о бесконечном существовали уже в древнегреческой науке. Связаны они были как с математическими, так и с натурфилософскими представлениями греков. Сейчас трудно сколько-нибудь достоверно утверждать, отделяли ли древнегреческие ученые эти представления друг от друга, особенно в ранний период развития древнегреческой науки.

Древние греки пытались решить вопрос о строении материи «вглубь». За неимением необходимой для рассмотрения этого вопроса экспериментальной базы то или иное решение его проводилось на чисто умозрительной основе. Речь шла о делимости тела, пространства и времени. Греки хорошо понимали, что физические возможности, которыми располагает реальный человек, совершенно недостаточны для ответа на вопрос, до каких пор, например, делимо тело. Поэтому процесс деления (понимаемый как раздробление тела) сверх реальных границ осуществимости этого деления продолжался умозрительным образом. При этом чисто мысленное деление неявно или явно полагалось соответствующим реальному строению материи.

Естественно возникал вопрос о результате подобного деления: существует ли вообще такой результат или процесс деления не завершим? Если процесс деления материи завершаем и результат деления существует, то возникал другой вопрос: итогом какого процесса деления является этот результат: конечного процесса (хотя бы и очень большого) либо бесконечного процесса? Ответы на эти вопросы вызывали трудности логического и теоретико-познавательного характера (см. [27], стр. 249, фрагменты 127—129, и стр. 251, фрагмент 136).

Наиболее ранней дошедшей до нас концепцией бесконечности была *концепция Анаксагора* (500—428 гг. до н. э.). Это была ярко выраженная концепция потенциальной бесконечности. Из фрагментов, оставленных нам Симплицием, видно, что Анаксагор считал тела потенциально бесконечными в отношении деления. Поэтому для Анаксагора не имело смысла говорить о конечном результате подобного процесса. Наличие результата означало бы завершение бесконечного процесса деления тела и получение неделимых, наименьших частиц. Поскольку возможность разделения тела на не имеющие величины частицы отвергалась Анаксагором, он отрицал возможность получения окончательного результата деления, признавая лишь потенциальную осуществимость этого процесса.

Таким образом, Анаксагор представлял конечную вещь потенциально бесконечной (в смысле делимости). Поскольку процесс деления вещи можно всегда продолжить, то всегда можно увеличить количество частиц, из которых состоит данная вещь. Это подтверждается словами самого Анаксагора, приводимыми Симплицием: «И в малом ведь нет наименьшего, но всегда есть меньшее. Ибо бытие не может разрешиться в небытие, но и в отношении к большему есть большее. И оно равно малому по количеству. Сама же по себе каждая вещь и велика и мала» ([28], стр. 154). Когда Анаксагор говорит о том, что «малое было бесконечным» ([28], стр. 153), то он понимает под этим не то, что малое состоит из бесконечного множества каких-то неделимых, а то, что малое представляет собой сумму бесконечного ряда бесконечно уменьшающихся слагаемых. Это представление, однако, встретилось с такими трудностями, на преодоление которых понадобилось около двух с половиной тысячелетий. То, что эти трудности осознавались уже в V в. до н. э., видно из апорий Зенона «Дихотомия» и «Ахиллес». Сущность трудностей заключалась в следующем.

Допустим, что конечная вещь (целое) представлена в виде бесконечного ряда бесконечно уменьшающихся частей. Спрашивается, как можно мыслить обратную операцию, т. е. как можно мыслить сумму этого бесконечного ряда? Если бы процесс деления был конечен, скажем, состоял бы из фиксированного числа шагов, равного $n$, то сумма ряда представляла бы сумму $n$ членов, вычисление которой было хорошо известно. Если деление проводилось по закону геометрической прогрессии, например дихотомически, то само по себе вычисление такой суммы не представляло трудностей для древнегреческой математики. Трудности связаны здесь не с вычислением этой суммы, а именно с ее логически непротиворечивым выражением.

Поясним эту мысль на примере апории Зенона «Дихотомия». В этой апории речь идет о представлении конечного отрезка длины $a$ в виде суммы членов бесконечного ряда

$$\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \frac{a}{2^3}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \ldots \tag{13}$$

Древнегреческие математики и философы рассматриваемого периода знали, что сумма членов этого ряда равна $a$, и Зенон, конечно, вовсе не пытался опровергать или подвергать сомнению истинность данного положения. Суть дела заключалась в том, что греки, интуитивно представляя себе сумму указанного ряда как некоторый предел, выразить логически этого факта не могли. Чтобы «снять» идеализацию, заключающуюся в представлении конечного отрезка в виде бесконечного ряда, необходимо было выработать другую идеализацию, являющуюся представлением о пределе суммы бесконечного ряда, и логически ее обосновать. Для этого прежде всего нужно было логически выразить само понятие предела. Трудности усугублялись еще тем, что не было ясно осознано то, что эти представления идеализированы, а поэтому их обоснование нельзя непосредственно усматривать в чувственных представлениях.

Предельный переход является идеализированным понятием, и обосновать его, опираясь только на чувственные представления, почерпнутые из области конечного, просто нельзя. Иначе действительно могут получаться нелепости.

Сумма любых $n$ членов ряда (13) никогда не будет равна $a$, ибо по мере увеличения $n$ разность $\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{a}{2^m}\right) - a$ будет сколько угодно уменьшаться, но с увеличением $n$ не исчезнет вовсе. Главная трудность заключается в том, как устранить эту разность, не впадая в противоречия.

Если вообразить бесконечный процесс деления законченным, тогда, конечно, можно представить ряд (13) завершенным, а сумму его членов представить как реальную сумму $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a}{2^m}$. Но такое решение приводит к не меньшим трудностям, связанным с актуальной бесконечностью, которые показаны Зеноном на примере апории «множественности вещей». Кроме того, если завершенность бесконечной последовательности связывать с наличием у нее последнего члена, то это приведет к противоречию. Неустранимость потенциально бесконечно малой разности истолковывалась либо как невозможность начать движение, либо как невозможность окончить начавшееся движение на конечном отрезке пути. Оба вывода противоречили чувственным данным. Все дело здесь в том, что прохождение отрезка пути, равного $a$, греки мыслили как достижение конечной точки $A$ отрезка $a$ путем последовательного прохождения членов ряда, не имеющего последнего отрезка, который должен содержать точку $A$. Противоречие получалось в результате того, что конечный отрезок представлялся вначале в идеализированном виде (в виде бесконечного ряда), а обосновать «снятие» этой идеализации, т. е. обосновать обратный процесс, пытались с помощью представлений, почерпнутых из области реально осуществимого.

Если бы реальное движение происходило так, как это трактуют его идеализированные представления, то оно действительно либо не могло бы начаться, либо не могло бы окончиться. На самом деле, если конечная величина представлена в виде суммы членов бесконечного ряда, т. е. в идеализированном виде, то обратный переход от суммы членов этого ряда к конечной величине тоже должен быть идеализированной операцией, основанной на тех же самых предпосылках потенциальной осуществимости, на которых основана первоначальная идеализация. Такой операцией является операция предельного перехода. Отсутствие точного понятия о предельном переходе, с одной стороны, логические и гносеологические трудности, связанные с интерпретацией бесконечных процессов,— с другой, побуждали греческих математиков каким-либо образом обойти прямое использование понятия бесконечности в логических рассуждениях, например в геометрических доказательствах.

«Крайняя научная осторожность в построении геометрической системы и привела греческих ученых к отказу от употребления бесконечных процессов...» ([29], стр. 13).

Одним из методов доказательства, не использующих в явном виде понятий предельного перехода и бесконечного процесса, был разработанный Евдоксом (408—355 гг. до н. э.) и Архимедом (287—212 гг. до н. э.) метод, который в XVII в. получил название метода исчерпывания.

Метод исчерпывания строился на чисто логическом доказательстве. Устанавливалось искомое предельное свойство, которое обосновывалось методом доказательства от противного. В ходе доказательства использовались предположения об осуществимости сколь угодно большого конечного числа шагов какого-либо процесса, т. е. фактически использовалась абстракция потенциальной осуществимости.

Понятие бесконечного процесса никогда в доказательствах не фигурировало, хотя доказывались положения, связанные с бесконечными процессами. В этом смысле иногда говорят, что бесконечность «изгонялась» из математики.

Как уже было показано в § 1, абстракция потенциальной осуществимости дает возможность мыслить потенциально бесконечный процесс. Там, где используется абстракция потенциальной осуществимости, нельзя говорить об «изгнании» бесконечности, хотя не пользоваться этим понятием можно.

Для метода исчерпывания существенным является следующий принцип, вытекающий из аксиомы Евдокса — Архимеда: если из какой-либо величины отнять половину ее или более, но не всю, а с остатком поступить так же, с новым остатком поступить аналогично и т. д., то через конечное (хотя бы достаточно большое) число шагов можно получить величину, которая будет меньше любой данной величины.

В доказательствах методом исчерпывания не ставится вопрос о том, как «преодолеть» бесконечно малую величину, представляющую разность между переменной величиной и ее пределом. Важно лишь то, что, какова бы ни была эта разность, она может быть сделана еще меньшей.

В методе исчерпывания идеализированное представление конечной величины в виде бесконечной последовательности, осуществимое с помощью понятия потенциальной бесконечности, «снимается» другой идеализацией, неявно выражающей предельный переход и предполагающей абстракцию потенциальной осуществимости. Осуществление подобного «снятия» представляет с логической и гносеологической точек зрения большой шаг вперед по сравнению с наивными рассуждениями о том, как можно реально преодолеть бесконечно малый отрезок, основанными на чистой интуиции, противоречивость которых показал Зенон в апориях «Дихотомия» и «Ахиллес». Например, в апории «Ахиллес» это «снятие» проявляется в вычислении того, когда и где Ахиллес догонит черепаху, и предполагает решенным вопрос, как он это может сделать. Поясним это на примерах применения метода исчерпывания к решению конкретной апории «Дихотомия». Как уже было сказано, в этой апории путь длины, равной $a$, представляется в виде суммы членов бесконечной последовательности отрезков пути: $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \ldots$ Вопрос о достижении движущимся телом конечной точки пути отождествляется с вопросом о том, равна ли «сумма» членов этой последовательности (точнее — предел этой суммы) величине $a$. Зенон показал, что если считать, что движущееся тело проходит последовательно отрезки пути, равные $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \ldots$, то точки $A$ оно никогда не достигнет, ибо под достижением точки $A$ понималось прохождение телом последнего отрезка, которому принадлежит эта точка. Однако было очевидным, что такого последнего отрезка не существует. Представление движения тела на пути, равном $a$, в виде последовательного прохождения отрезков этого пути, равных $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \ldots$, есть идеализация реального движения. Поэтому нельзя ставить вопрос, достигнет ли реально движущееся тело точки $A$, если мы этому движению придаем идеализированный характер. Если же иметь в виду именно такой характер движения тела, то достижение телом точки следует рассматривать тоже с позиции некоторой идеализации, но не понимать его как реальное достижение точки $A$. В методе исчерпывания этой идеализацией является неявное предположение о существовании предела. На основе метода исчерпывания, предполагая, что тело достигнет точки $A$, можно вычислить пройденный телом путь.

Например, положим, что тело достигнет точки $A$, т. е. что сумма $S$ членов ряда $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots \frac{a}{2^n} \ldots$ равна $a$, и докажем, что действительно $S = a = \frac{a}{2} + \ldots + \frac{a}{2_n} + \ldots$ На самом деле сумма $S$ понималась как $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{a}{2^m}$.

Допустим, что $S \neq a$. Тогда либо $S < a$, либо $S > a$. Легко убедиться, что условия задачи позволяют применить для ее решения метод исчерпывания, ибо по мере возрастания $n$ сумма $S_n = \frac{a}{2} + \ldots + \frac{a}{2^n}$ неограниченно приближается к $a$, но не может ее превзойти:

$$S_n = \frac{p_1 - p_n q}{1 - q}, \text{ где } p_1 = \frac{a}{2};\ p_n = \frac{a}{2^n};$$

$$q = \frac{1}{2};\ S_n = a - \frac{a}{2^n}.$$

1-й случай: $S < a$.

Какова бы ни была разность $a - S$, согласно принципу исчерпывания можно подобрать такое $S_n$, что $a - S_n < a - S$. Тогда $S_n > S$. Это невозможно, ибо никакая частичная сумма членов ряда не может превышать своего предела.

2-й случай: $S > a$.

Тогда, какова бы ни была разность $S - a$, можно подобрать такое $S_n$, что будет выполняться неравенство $S - S_n < S - a$. Отсюда следует, что $S_n > a$, но это тоже невозможно, так как $S_n = a - \frac{a}{2^n}$. Поэтому предположение о том, что $S \neq a$, ложно, откуда получаем заключение $S = a$.

Аналогично решается апория «Ахиллес», имеющая ту же трудность, что и «Дихотомия». По этому поводу А. О. Маковельский писал: «Главная трудность аргумента «Ахиллес» заключается в непонятности, как возможно преодоление того бесконечно малого пространства, которое всегда будет отделять Ахиллеса и черепаху» ([28], стр. 60).

Метод исчерпывания предполагает эту трудность преодоленной, что позволяет решить вопрос о том, где произойдет их встреча.

Древнегреческие математики, владея методом исчерпывания, на эти вопросы по существу отвечали так: пусть неясно, как это возможно сделать, но если принять возможность Ахиллеса последовательно проходить отрезки пути $a, \frac{a}{n}, \frac{a}{n^2}, \ldots, \frac{a}{n^k}, \ldots$ и возможность черепахи проходить соответственно отрезки $\frac{a}{n}, \frac{a}{n^2}, \ldots, \frac{a}{n^{k+1}} \ldots$, где $a$ есть исходное расстояние между Ахиллесом и черепахой и где скорость Ахиллеса принимается за единицу, а скорость черепахи равна $\frac{1}{n}$, $n > 2$, $k > 1$, и если предположить, что Ахиллес догонит черепаху, то можно вычислить, какое расстояние будет пройдено ими до точки их встречи. Ахиллес пройдет расстояние $\frac{an}{n-1}$, а черепаха пройдет расстояние $\frac{a}{n-1}$.

Так как $\frac{a}{n-1} + a = \frac{an}{n-1}$, то можно заключить, что наше вычисление верно. Причем если бы Ахиллес и черепаха реально двигались так, как говорится в апории, то Ахиллес реально никогда бы не догнал черепаху, ибо из предпосылок о том, что Ахиллес может сколь угодно далеко продвинуться по ряду, состоящему из отрезков $a, \frac{a}{n}, \ldots$

$\ldots, \frac{a}{n^k}, \ldots$, а черепаха — по ряду, состоящему из отрезков $\frac{a}{n}, \frac{a}{n^2}, \ldots, \frac{a}{n^{k+1}}, \ldots$, действительно следует данный вывод.

На самом деле реальное движение здесь идеализировано, ибо представление о его характере основывается на абстракции потенциальной осуществимости. Кроме того, при такой идеализации вопрос о том, как можно преодолеть бесконечно малое пространство, например расстояние между Ахиллесом и черепахой, вообще теряет смысл, если это «преодоление» понимать как действительное прохождение бесконечного множества отрезков. Подобное «преодоление» являлось бы завершением бесконечного процесса, в смысле наличия у него последнего члена, что противоречиво.

Не меньшие логические трудности связаны с представлением конечных величин в виде совокупности бесконечного множества непротяженных точек. В доаристотелевский период такой концепции, вероятно, придерживались ранние пифагорейцы (VI—V вв. до н. э.).

Э. Кольман пишет, что для пифагорейцев «частями беспредельного, единицами, являются не материальные атомы, а геометрические точки» ([30], стр. 84).

Дело в том, что в этот период геометрия как физика еще не отделялась от геометрии как математики ([31], стр. 12, 13). Представление геометрических тел в виде бесконечных совокупностей переносилось на физические тела и явления. Пространство, время и движение рассматривались, исходя из подобных представлений. Это приводило к логическим и гносеологическим трудностям, которые заметил Зенон и которые он сформулировал в виде апории, впоследствии названной «апорией против множественности вещей», а еще позднее — «парадоксом меры». Данная апория вскрывала трудности, связанные с представлением конечного тела в виде бесконечной совокупности неделимых. Эти неделимые в свою очередь представлялись не имеющими измерений точками. Их сумма полагалась равной нулю, из чего следовало, что тело, имеющее измерение, лишено измерения. Если же неделимые представлялись имеющими измерение, то тело конечной величины полагалось бесконечно большим по величине. В обоих случаях получались противоречия.

Трудность заключалась в логических противоречиях, возникающих при рассмотрении конечных величин, например при рассмотрении пространства и времени как бесконечных совокупностей непротяженных точек. В этом заключался и глубокий философский вопрос о правомерности представления непрерывного в виде агрегата дискретных элементов.

Непротиворечивое представление непрерывных величин, например, протяженного линейного континуума как агрегата дискретных непротяженных элементов стало возможным в современной теории точечных множеств. По этому поводу Адольф Грюнбаум пишет следующее:

«С тех пор как греки определяли точку как «то, что не имеет частей», философы и математики задаются вопросом о непротиворечивости протяженного континуума как агрегата непротяженных элементов. Этот вопрос исследовали Зенон из Элеи, Аристотель, Кавальери, Паскаль, Больцано, Лейбниц, Г. Кантор» ([32], стр. 288).

Так же, как и представление конечной величины в виде бесконечного ряда, представление конечной величины в виде агрегата непротяженных точек является некоторой идеализацией. И если мы хотим из таких точек получить протяженную величину, то это может быть сделано лишь за счет введения новой идеализации, которая позволит «снять» прежнюю идеализацию. Такое «снятие» осуществляется на основе понятий теории меры ограниченных точечных множеств. Идеализированный характер измерения данных точечных множеств проявляется уже в том, что предполагается всегда выполнимой операция измерения любого отрезка. Подробнее этот вопрос будет освещен в главе второй.

«Снятие» в данном случае представляет операцию, обратную операции расчленения конечного отрезка. В рассматриваемых нами случаях им является некоторый конечный отрезок, имеющий одно измерение. Этот отрезок может быть расчленен разными способами.

1. Конечное расчленение. Отрезок длиной $a$ представляется в виде конечного множества отрезков, состоящего из $n$ отрезков. Тогда «снятием» данного расчленения будет арифметическая сумма длин этих отрезков: $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Эта сумма вновь «восстановит» исходную длину отрезка, если даны длины всех отрезков.

2. Потенциально бесконечное расчленение. Если отрезок расчленить по некоторому закону, например по закону геометрической прогрессии $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \ldots$, то «снятие» будет представлять операцию, вновь «восстанавливающую» данный отрезок, причем не требуется знания длин всех отрезков, требуется закон их порождения. Такой операцией будет операция предельного перехода. Если отрезок $a$ действительно был расчленен на отрезки $\frac{a}{2}, \ldots, \frac{a}{2^n}, \ldots$, то $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$ будет равен $a$. При этом операция предельного перехода определяется с таким расчетом, чтобы после любого расчленения отрезка $a$ вновь можно было бы его «восстановить».

3. Актуально бесконечное расчленение. Можно представить отрезок, имеющий меру $a$, расчлененным на актуально бесконечное множество нульмерных точек, имеющее мощность континуум ($\aleph$). Тогда «снятие» определяется как операция, которая бы по точечному множеству мощности $\aleph$, расположенному на интервале $[0, a]$, вновь «восстанавливала» бы меру, равную мере отрезка $a$. Современная теория меры ограниченных точечных множеств как раз такое «восстановление» предусматривает.

Но можно представить, что отрезок $a$ расчленен на точечное множество какой-либо другой мощности. Тогда и определение меры надо было бы переформулировать так, чтобы по множеству этой мощности, расположенному на отрезке, «восстанавливать» меру этого же отрезка. Все эти операции учитывают то, что конечный отрезок расчленяется хотя и на бесконечную последовательность отрезков или на бесконечное множество точек, но ограниченное в пространстве.

Гносеологическая сторона трудностей, вскрываемых апорией Зенона, заключается в решении вопроса о познавательной ценности рассматриваемого представления. В настоящее время трудно судить о том, какой позиции придерживался сам Зенон в данном вопросе: либо он считал представление протяженных величин в виде агрегата непротяженных величин, непосредственно копирующим действительность, и поэтому, обнаруживая противоречивость данного представления, отрицал множественность вещей, а потому являлся сторонником «единого бытия» Парменида, либо он, как говорит Маковельский, становился на точку зрения своих противников и показывал те нелепости, к которым она приводит. Для нас важно то, что в любом случае Зеноном был поставлен вопрос о познавательной ценности представления протяженных величин как бесконечной совокупности непротяженных величин. Решение же этого вопроса может быть дано лишь на основе диалектико-материалистической теории познания. Математика дает лишь формальный аппарат для такого представления и его «снятия».

Дело в том, что логическая непротиворечивость рассматриваемого в апории представления, в конце концов достигнутая в современной теории точечных множеств, еще не дает сама по себе ответа на вопрос о познавательной ценности этого представления. Учитывая результаты, достигнутые диалектико-материалистической теорией познания, можно сказать, что практика, выражающаяся в решении научно-практических задач, говорит нам об обоснованности подобного представления. В то же время это представление является огрубленным отражением действительности, основанным на такой идеализации, как абстракция актуальной бесконечности.

Греческие математики и философы, естественно, не могли дать решения трудностей, обнаруживающихся в апории Зенона, ни с логической, ни с гносеологической стороны. Поэтому возникла попытка вообще отбросить представление конечной величины в виде чего-то бесконечного, будь то бесконечного ряда или бесконечной совокупности.

Подобную *концепцию неделимых* развил Демокрит (460—372 гг. до н. э.). Он не отрицал бесконечности вообще. Демокрит, например, признавал бесконечность вселенной и бесконечность атомов во вселенной ([33], стр. 109, фрагмент 124), но вместе с тем считал, что процесс деления физических тел не может быть бесконечным, поэтому имеется неосуществимый шаг этого процесса, означающий, что тело разделено вплоть до неделимых далее атомов.

Основная причина неделимости атомов, по мнению Демокрита, состояла в отсутствии у них частей. Ввиду этого атом не мог быть разделен не только физически, но и математически. Подобное представление о конечной частице, чрезвычайно маленькой, но не бесконечно малой, имеющей форму, но не имеющей частей, в известном смысле не лишено противоречий. Прежде всего оно противоречит укоренившемуся представлению о возможности деления любой конечной величины, основанному на абстракции потенциальной осуществимости.

В самом деле, если атомы имеют величину, то как можно утверждать, что конечная величина не может быть разделена, какова бы она ни была. Отсюда, по выражению Аристотеля, отрицание бесконечности влечет не меньшие логические трудности, чем ее признание. Многие древнегреческие математики и философы критиковали Демокрита за то, что его взгляды на бесконечное противоречат математическим представлениям о потенциальной осуществимости деления любой конечной величины. Аристотель, например, писал по этому поводу следующее:

«Неразумно приписывать материальным элементам отсутствие частей. Учащие о неделимых телах неизменно впадают в конфликт с математическими науками» ([33], стр. 105—106).

В чем состоит этот конфликт, можно видеть из следующих слов Симплиция: «Дело в том, что последние [математические науки] признают делимым даже мыслимое тело, они же не считают делимым даже чувственно воспринимаемое тело» ([33], стр. 106).

Как отмечает С. Я. Лурье [34], если принять концепцию неделимых Демокрита, то можно построить непротиворечивую геометрическую теорию, совершенно отличную от обычной геометрии.

В геометрии Демокрита геометрические понятия непрерывности, деления отрезка, окружности, касательной, точки, линии и т. п. приобретают новый смысл. Например, непрерывность Демокрит понимал как нахождение частиц достаточно близко друг от друга. Деление в теории Демокрита понималось как распределение неделимых частиц на группы. Поэтому не всякую линию можно разделить пополам. Если линия состоит из нечетного числа частиц, то разделить ее на две равные части нельзя.

В обычной геометрии площадь треугольника с основанием и высотой, равными $a$, равна $\frac{a^2}{2}$, а в геометрии Демокрита она равна $\frac{a^2+a}{2}$. Эти и другие особенности геометрической теории Демокрита проистекают из концепции отрицания бесконечности процесса деления. Данная концепция имела целью избавление математики от трудностей, вскрытых Зеноном в апориях, связанных с бесконечностью. В известной мере эта цель достигалась отрицанием бесконечной делимости и отрицанием существования непротяженных частиц. Но концепция неделимых Демокрита не была избавлена от тех трудностей, которые сформулировал Зенон в апориях «Стрела» и «Стадий». Сущность этих трудностей состояла в том, что признание неделимых пространства и времени приводило к концепции прерывного, внезапного движения, происходящего путем мгновенных скачков. Согласно такой концепции, между двумя временными неделимыми не протекает никакого времени, а между двумя неделимыми пространства не существует никакого пространства. Поэтому неделимое движущегося тела в неделимое времени пребывает в каком-либо неделимом пространстве и не может находиться одновременно на двух неделимых пространства, иначе оно разделится.

Процесс движения, таким образом, складывается из ряда результатов движения. Подобное понимание движения резко противоречило интуитивному представлению о непрерывности пространства, времени и самого процесса движения.

Интуитивное понимание непрерывности отрезка пространства или интервала времени обычно связывается с отсутствием у них «пробелов». Существование подобного «пробела» по интуитивным представлениям свидетельствует о прерывности отрезка, а по представлениям Демокрита непрерывность предполагает наличие определенного рода «пробелов». Непрерывность движения обычно связывается с «плавностью», с отсутствием скачков, а у Демокрита непрерывность движения представляется как движение, совершающееся путем мгновенных скачков.

Отрицание бесконечности приводило и к более существенным трудностям, например к трудностям в построении геометрии. Отсутствие идеализации, основанной на абстракции бесконечности, вело к невозможности создания представлений об идеальных фигурах (идеальных квадратах, окружностях и т. п.). Это сильно усложняло геометрию и делало ее практически неприемлемой. Чтобы преодолеть эти трудности, надо было прибегнуть к понятию бесконечного, как, например, это делал Аристотель, говоря, что «непрерывное есть то, что всегда делимо на всегда делимые части» ([35], стр. 109).

**Отношение Аристотеля к проблеме бесконечного.** Аристотель считал неправомерным отказ от использования понятия бесконечности ради устранения некоторых трудностей, связанных с этим понятием, тем более что этот отказ приводит к неменьшим трудностям.

«Рассмотрение бесконечного,—писал Аристотель,—имеет свои трудности, так как много невозможного следует и за отрицанием его существования, и за признанием» ([35], стр. 47).

Не отказываясь от понятия бесконечности, Аристотель сделал попытку развить такое учение о бесконечном, которое удовлетворяло бы потребностям математики и не было бы подвержено тем логическим трудностям, на которые указывал Зенон в своих апориях.

Аристотель понимал, что наука о природе, имея дело с разного рода величинами — пространством, движением, временем, не может отказаться от абстракции бесконечности. Поэтому, говорил он, исследуя природу, надо исследовать вопрос о бесконечном ([35], кн. III, гл. 4). Например, Аристотель указывал на необходимость исследовать бесконечное в связи с изучением движения.

«Движение, по всей видимости, относится к непрерывному, а бесконечное проявляется прежде всего в непрерывном, поэтому, определяя непрерывное, приходится часто пользоваться понятием бесконечного, так как непрерывное бесконечно делимо» ([35], кн. III, гл. 1).

В исследовании бесконечного Аристотель выделял два основных вопроса.

1. Существует ли бесконечное реально или нет?

2. Если существует, то что оно такое?

Согласно учению Аристотеля, все тела состоят из четырех элементов (воды, земли, воздуха и огня). Они являются началами (сущностями) всех тел. Аристотель был против учения Анаксагора о бесконечном количестве начал. Конечное тело состоит из конечного числа элементов, и ни один из них не может находиться в теле в бесконечном количестве. Мир в целом, по его мнению, также конечен. Поэтому, по учению Аристотеля, в качестве начала, или сущности, бесконечного в действительности нет ни в одной из его форм([35] кн. I, гл. 4; кн. III, гл. 5).

«Немыслимо,— пишет Аристотель,— бесконечному существовать как актуальное, как сущность и начало» ([35], стр. 47).

Употребляемый Аристотелем термин «актуально бесконечное» не следует всегда отождествлять с понятием актуальной бесконечности в современной математике. Анализ смысла этого термина у Аристотеля показывает, что термин «актуально» зачастую означает у него «реально», «в действительности». Особенно хорошо это видно при разрешении Аристотелем апорий Зенона, о чем будет сказано ниже. Бесконечное Аристотель понимал как абстракцию, применимую в процессе познания действительности, но не как свойство реальной действительности. Аристотель не мог иметь общего понятия об актуально бесконечном в современном смысле этого слова, так как общий признак всякого бесконечного множества (наличие у него правильного подмножества, эквивалентного этому множеству) представлялся парадоксальным вплоть до XIX в. Однако Аристотель имел представление о некоторых актуально бесконечных множествах, например о множестве, полученном в результате мысленного доведения до конца бесконечного деления линии. Сколь ни противоречиво подобное представление, все же оно является представлением о множестве, мыслимом завершенным, т. е. данным всеми своими элементами, количество которых заведомо не является конечным. Поэтому неверно было бы утверждать, что Аристотель вообще отрицал абстракцию актуальной бесконечности как недопустимую. Он считал ее хотя и допустимой, но бесполезной, не играющей никакой роли в математике.

Бесконечное, по Аристотелю, может существовать лишь «по совпадению», т. е. по природе тело не бесконечно, но его можно мыслить как бесконечное в каком-либо смысле этого слова. Поэтому Аристотель говорит, что конечное тело не делимо до бесконечности, а конечная линия — делима ([35], стр. 52). Разница здесь заключается в том, что в первом случае мы имеем дело с физическим объектом, а во втором случае, — с математическим, идеализированным, существующим лишь в мышлении.

Выявлению различий физических и математических объектов Аристотель уделяет много внимания ([36], кн. 3, гл. 5, 6; кн. 13, гл. 1, 3). И это играет важную роль в понимании учения Аристотеля о природе вообще и учения о бесконечном в частности.

В «Метафизике» он пишет: «Предмет математических наук не существует ни внутри, ни вне чувственных вещей, а существует постольку, поскольку у чувственных вещей выделяется одна какая-нибудь сторона и рассматривается предмет исключительно с этой одной стороны. Поэтому предмет математики вполне реален, хотя и не существует в изолированном виде» ([36], кн. 13, гл. 3).

Каким-либо обособленным бытием математические объекты (линии, плоскости, точки и т. д.) не обладают. Из этого следует, что математические науки не являются науками о чувственных вещах, но и не являются в то же время науками о предметах, существующих отдельно от вещей. Точки, линии, плоскости — это или пределы, или сечения. Они не находятся в теле как некоторые сущности, и тело не состоит из них ([36], кн. 13, гл. 1).

«Очевидность не показывает нам, чтобы что-либо могло слагаться из линий или плоскостей, или точек, между тем, если бы они представляли собою некоторую материальную сущность, тогда они, очевидно, могли бы подвергаться такому изменению» ([36], стр. 220).

Установление различия между физическими и математическими объектами явилось базой для разрешения Аристотелем апорий Зенона. Аристотель считал, что суть дела в разрешении апорий, связанных с бесконечностью, состоит в том, что ни путь, ни время в действительности, т. е. актуально (в аристотелевском смысле этого слова), не являются бесконечно делимыми. Поэтому апории Зенона касаются не реальных физических объектов, а некоторых математических представлений об этих объектах ([35], кн. 8, гл. 8).

В действительности ни пространство не слагается из бесконечного количества точек, ни время не слагается из бесконечного количества «теперь», в действительности нельзя реальные вещи бесконечно делить. Бесконечное можно усматривать в реальных вещах лишь по совпадению, в возможности (потенциально). И если из апорий Зенона вытекает, что нельзя пройти конечный отрезок, так как мы его представляем состоящим из бесконечного числа частей, то это еще не значит, что нельзя пройти данный отрезок пути в действительности, ибо актуально он не бесконечен. Аристотель по этому поводу говорит следующее:

«На вопрос, можно ли пройти бесконечное число частей во времени или по длине, следует ответить, что в одном отношении можно, в другом нет. Если они будут актуально — нельзя, если в потенции — возможно, так как предмет, движущийся, прошел бесконечное по совпадению, а не прямо, ибо бесконечное число половин в линии есть нечто для нее акцидентальное, а сущность и бытие ее иные» ([35], стр. 163).

Аристотель нигде не высказывается против допустимости абстракции актуальной бесконечности, понимаемой в смысле абстракции актуально бесконечного множества (но не в смысле реально существующего бесконечного множества предметов). Более того, он считает, что если допустимо представление о реальных телах как о чем-то бесконечном, то это представление может быть произведено и с точки зрения абстракции актуальной (завершенной) бесконечности.

Аристотель говорит, что если допустить, что тело бесконечно делимо, то можно допустить и то, что оно бесконечно разделено. А это и есть то наивное представление о бесконечном множестве, которое единственно существовало в древнегреческой науке.

«Если тело всюду делимо и это возможно, то и пусть будет оно (в нашей мысли) всюду разделено, хотя бы (фактически) оно и не было разделенным... Если (тело) по своей природе всюду делимо, то не будет ничего невозможного даже и в том, чтобы оно было разделено бесконечное число раз, хотя, пожалуй, никто не сможет произвести такое бесконечное деление» ([27], стр. 246).

Тем, кто апории Зенона понимал в том смысле, «что невозможно пройти бесконечное в ограниченное время, т. е. коснуться бесконечного количества частей в ограниченное время» ([37], стр. 107), Аристотель отвечал, что время и путь бесконечны в одном и том же смысле. На обоснование этого положения он уделил в «Физике» довольно много места.

Если представлять бесконечно делимым отрезок пути, то соответственно следует представить бесконечно делимым и отрезок времени. Аристотель рассматривает и путь и время в виде бесконечных множеств, между элементами которых устанавливается взаимно однозначное соответствие, и таким способом разрешает апории Зенона ([35], кн. VI, гл. 1, 2, 3). Поэтому здесь Аристотель допускает абстракцию актуальной бесконечности в смысле завершенной бесконечности, но в ее наивном понимании.

Аристотель, говоря о том, что бесконечные величины не существуют актуально, говорит, по его терминологии, о «чувственно-воспринимаемых величинах».

Реальные, «чувственно-воспринимаемые величины» всегда конечны, хотя могут быть сколь угодно большими или малыми. Поэтому Аристотель считает, что математике незачем рассматривать величины как актуально бесконечные, т. е. с точки зрения завершенной бесконечности. «Отрицание актуально бесконечного в отношении увеличения не наносит вреда математике, так как она в нем не нуждается и не пользуется им. Математикам требуется, чтобы линия не была ограничена, но это обеспечивает потенциальная бесконечность. Им надо, чтобы величайшая величина делилась в той же пропорции, что и какая угодно. Это тоже обеспечивается. Актуально бесконечное бесполезно для доказательств. Если его отбросить, то для математики вреда не будет, а зато бытие будет связываться с существующими величинами» ([35], стр. 55).

Актуальная (завершенная) бесконечность в ее наивном понимании хотя и допускается Аристотелем в некоторых исследованиях, но она, по его мнению, не отражает реальности. Для чего, спрашивает Аристотель, чувственно воспринимаемому телу быть бесконечным? И отвечает: такой необходимости нет ([35], кн. III, гл. 8). Поэтому от данной абстракции можно отказаться без ущерба для науки. Абстракция потенциальной бесконечности вполне достаточно для научных целей.

Такое предпочтение потенциальной бесконечности бесконечности актуальной, видимо, делалось Аристотелем под влиянием школы Евдокса (408—355 гг. до н. э.).

Инфинитезимальные методы, разрабатываемые Евдоксом, требовали только абстракции потенциальной осуществимости.

Таким образом, основы всех главных направлений в учении о бесконечном, хотя иногда и в наивном с современной точки зрения виде, были заложены уже в древнегреческой науке. Развитие этого учения шло в связи с потребностями древнегреческой науки, в первую очередь математики.

**Особенности исследований абстракций бесконечности и осуществимости в древнегреческой науке.** Необходимо отметить некоторые особенности учений о бесконечном этого периода.

Во-первых, не было сколько-нибудь развито учение об актуальной бесконечности. Сама абстракция актуальной бесконечности понималась наивно и логически противоречиво. Зенон, а затем Аристотель считали, что если конечное тело действительно разделить на бесконечное число частей или если оно по своей природе состоит из бесконечного множества частей, то тело превращалось бы в ничто, а «вселенная была бы не чем иным, как кажущимся (миражем)» ([27], стр. 247).

Эту трудность Аристотель преодолевал отрицанием того, что тело в действительности бесконечно разделено. В природе нет ничего актуально бесконечного, математика, как считал Аристотель, тоже может без него обойтись. По мнению Аристотеля, для науки в этом понятии не было необходимости, хотя он и не считал его принципиально недопустимым. Объясняется такое отношение к понятию актуальной бесконечности тем, что в тот период не было математических теорий, использующих это понятие в явном виде. (Хотя неявно оно использовалось, например, в геометрии.) Подобные теории были созданы значительно позже. В этот период еще не употреблялось понятие об актуально бесконечно малой величине, которая не удовлетворяет аксиоме Евдокса — Архимеда и в то же время не равняется нулю, т. е. о такой величине $\alpha$, что $A + \alpha = A$ и $\alpha \cdot n = \alpha$, где $A$ — любое число, а $n$ — целое положительное число.

Ни неделимые Демокрита, ни точки пифагорейцев не были актуально бесконечно малыми, каковыми, например, были неделимые Кавальери (1548—1647).

В древнегреческой математике не было разработано также теорий, использующих понятие актуально бесконечно большого. Эти теории сложились уже в новое время и связаны с именами Больцано, Дедекинда, Кантора. По греческим представлениям, деление тела на бесконечное множество частей означало разделение его на неделимые, не имеющие измерений точки. Как мы уже видели, это представление вызывало логические трудности, отраженные Зеноном в «апории против множественности вещей». В дальнейшем с возникновением представления о конечной величине как о сумме бесконечного количества актуально бесконечно малых величин возникли новые трудности. Логические трудности возникли также в связи с попыткой обосновать математику при помощи «наивной» теории множеств, использующей понятие актуальной бесконечности.

В греческой науке эта абстракция не играла такой роли, какую она приобрела впоследствии, поэтому Аристотель считал, что нет необходимости пользоваться понятием актуальной бесконечности, ибо без него наука может обойтись.

Во-вторых, особенностью древнегреческих учений о бесконечном являлось то, что не исследовалась взаимосвязь абстракций осуществимости с абстракциями бесконечности. Например, в методе исчерпывания греки фактически использовали абстракцию потенциальной осуществимости. Это видно хотя бы из того, что они опирались в доказательствах методом исчерпывания на гипотезу об осуществимости любого конечного шага процесса. В доказательствах методом исчерпывания понятие бесконечности не фигурирует. Но это вовсе не означает, что таким способом греки избавились от тех трудностей, которые связаны с бесконечностью. Все дело в том, что эти трудности были отодвинуты вглубь, в источники самой абстракции потенциальной бесконечности.

В настоящее время одни исследователи древнегреческой математики утверждают, что греки путем перехода к методу исчерпывания избавились от абстракции бесконечности и тем самым действительно избавились и от тех логических и гносеологических трудностей, которые связаны с бесконечностью. К таким исследователям относятся Г. Г. Цейтен [38], И. Гейберг ([39], гл. V), С. Я. Лурье [34], Я. Л. Трайнин ([29], гл. 1, § 4) и др.

Например, Гейберг писал, что Зенон «использовал логические затруднения, связанные с понятиями «бесконечного» и «непрерывного», в своих знаменитых парадоксах, в которых стремился опровергнуть реальность движения. Строгая логичность этих парадоксов заставила греческих математиков совершенно отказаться от применения понятия бесконечного как непостижимого» ([39], стр. 22). Но другие историки математики высказывают иную точку зрения, заключающуюся в том, что абстракция бесконечности древнегреческими математиками в методе исчерпывания все же использовалась, хотя и в неявном виде. А. П. Юшкевич по этому поводу говорит, что в древнегреческой математике не фигурировал лишь термин «бесконечность», но использовалась сама идея бесконечности, в частности идея неограниченного приближения некоторой величины последовательностью других величин, а также представление о возможности разделить некоторую величину на части, которые будут меньше любой данной сколь угодно малой величины. Он говорит, что идея потенциальной бесконечности входит и в метод исчерпывания, но эта идея не была греками четко сформулирована ([40], стр. 179).

На наш взгляд, различие между этими точками зрения на бесконечность в древнегреческой математике объясняется различием между абстракциями осуществимости и бесконечности вообще и различиями между абстракцией потенциальной осуществимости и потенциальной бесконечности применительно к методу исчерпывания в частности.

Дело в том, что в методе исчерпывания не предполагается наличия бесконечного процесса, не предполагается производства бесконечного количества шагов какой-либо операции. Предполагается лишь то, что какую бы фиксированную конечную разность между данной величиной $\mathfrak{B}$ и ее пределом $\mathfrak{A}$ мы ни взяли, осуществим такой $n$-й конечный шаг в процессе приближения величины $\mathfrak{B}$ переменной величиной $\mathfrak{A}_n$, что конечная разность $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}_n$ будет меньше взятой нами фиксированной разности ($n$ здесь является любым конечным натуральным числом). Предположение об осуществимости любого конечного шага процесса означает допущение в этом доказательстве абстракции потенциальной осуществимости, на основе которой можно мыслить осуществимым бесконечный процесс.

В методе исчерпывания хотя абстракция потенциальной бесконечности и не используется, но используется гипотеза, служащая основанием для образования этой абстракции. Естественно, что этот метод не нуждается в абстракции актуальной бесконечности. Поэтому нет существенной разницы между утверждением о том, что греки в методе исчерпывания избежали абстракции бесконечности, и утверждением, что это понятие использовалось в неявном виде: просто одна абстракция была заменена другой, не менее сильной. На наш взгляд, необоснованным является лишь утверждение, что греки избавились от трудностей, связанных с бесконечностью. На самом деле, эти трудности просто были сдвинуты вглубь, в обоснование допустимости самой потенциальной бесконечности.

Третьей особенностью учения о бесконечном рассматриваемого нами периода является незначительная связь этого учения с логической проблематикой. Парменид (родился в 515 г. до н. э.) и особенно его ученик Зенон Элейский указали лишь на некоторые логические трудности, а именно на логические противоречия, связанные с бесконечностью. В этот период еще не были созданы сами логические теории, так что не приходится и говорить об их связях с учением о бесконечности.

Со времени создания первой логической теории Аристотелем вплоть до зарождения интуиционистского направления в математике и логике не ставился вопрос о связи учения о бесконечном с логикой. Законы классической логики считались незыблемой основой рассуждений в любой теории, независимо от того, какими понятиями она пользуется и о какой области объектов идет в ней речь.

Инфинитезимальные методы древних греков сыграли огромную роль в развитии математики вообще и в развитии учения о бесконечном в частности. В новое время эти методы послужили источником развития интегрального и дифференциального исчисления. Известно, какое влияние метод Архимеда оказал на Кеплера.

В нашу задачу не входит анализ математических методов и теорий, использующих понятие бесконечности, они нас будут интересовать лишь постольку, поскольку само учение о бесконечном развивалось в непосредственной связи с этими методами и теориями.

**Возникновение и развитие современных представлений об актуальной бесконечности.** Инфинитезимальные методы в математике XVII в., разработанные Кеплером (1571—1630), Кавальери (1598—1647) и другими математиками, и появившееся во второй половине XVII в. дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном (1642—1727) и Лейбницем (1646—1716), будут нас интересовать как основа возникновения и развития учения об актуально бесконечно малых и как основа всей логической проблематики, связанной с понятием актуально бесконечно малой величины.

Одним из ранних методов, оперирующих с актуально бесконечно малыми, был «интеграционный» метод, разработанный Кеплером. Любую фигуру или тело Кеплер представлял в виде суммы бесконечного множества бесконечно малых частей, имеющих ту же размерность, что и образуемая ими фигура или тело.

Еще раз заметим, что актуально бесконечно малая величина отлична от чрезвычайно малой неделимой Демокрита, ибо последняя хотя и сверхчувственно мала, но все же конечна. Поэтому нет оснований приписывать Демокриту оперирование бесконечно малыми, как это делат С. Лурье [34]. Актуально бесконечно малые не являются также и точками, не имеющими измерений, так как бесконечно малые не равны нулю.

Между неделимыми Демокрита и бесконечно малыми Кеплера или неделимыми Кавельери имеются и другие существенные различия. Так, например, неделимые Демокрита не одномерны и не двумерны, а только трехмерны, так как являются телами ([33], стр. 105). Бесконечно малые Кеплера и неделимые Кавальери могут быть и одномерными и двумерными. Например, Кеплер представлял круг состоящим «из бесконечно большого числа бесконечно узких секторов, каждый из которых может рассматриваться как равнобедренный треугольник» ([41], стр. 154). Кавальери в своей «геометрии неделимых» рассматривал фигуры и тела как составленные из элементов, имеющих размерность, меньшую на единицу по сравнению с теми фигурами и телами, которые эти элементы составляют. Неделимые Демокрита имеют ту же размерность, какую имеет тело, ими составляемое. У Кавальери в геометрическом теле неделимыми являются плоскости, которые составлены в свою очередь из линий, не имеющих ширины.

Методы Кеплера и Кавальери имели большое значение для развития математики, несмотря на то, что оставалась невыясненной природа актуально бесконечно малых Кеплера и неделимых Кавальери и несмотря на то, что эти понятия не имели рационального объяснения.

Этот же недостаток имел анализ бесконечно малых, созданный во второй половине XVII в. Ньютоном и Лейбницем (теория флюксий Ньютона и исчисление дифференциалов Лейбница). Правомерность использования актуально бесконечно малых не имела логического обоснования. В одном и том же процессе вычисления дифференциалы вели себя и как конечные разности, и как нули. Поэтому дифференциалы имели мистические свойства, являясь величинами, равными нулю и не равными нулю в одно и то же время. Маркс называл подобное рассмотрение дифференциалов мистикой и считал его лишенным какой бы то ни было диалектики (см., например, [78]).

Ньютон и Лейбниц сразу исходили из существования актуально бесконечно малых (моментов, дифференциалов), которые то необходимо было рассматривать как обычные величины, то можно было отбрасывать, не нарушая точности равенства. Это были какие-то таинственные и по существу противоречивые абстракции. Поэтому актуально бесконечно малое представляет не диалектическое, а просто логически противоречивое понятие, которое было отброшено дальнейшим развитием математики.

Но, несмотря на это, оно сыграло в определенный период положительную роль.

В начале XIX в. математический анализ был перестроен на новой базе — на идее предельного перехода. Бесконечно малая величина стала пониматься уже не как актуально бесконечно малая, а как потенциально бесконечно малая, описывающая «не размеры величины, а характер ее изменения» ([42], стр. 32), как величина, безгранично убывающая. Здесь хорошо виден диалектический характер развития учения о бесконечном: интуитивное представление о потенциально бесконечном в отношении деления у древних греков (после периода господства учения об актуально бесконечно малых) в эпоху Коши вновь становится основным понятием о бесконечном в математике, но на новой основе, представляя строго определенное понятие потенциально бесконечно малой величины.

Наука вообще отказалась от понятия об актуально бесконечно малом как от понятия внутренне противоречивого. Кантор доказал, что это понятие не совместимо с понятием линейной числовой величины (в [43] кратко изложен ход доказательства). Следует сказать, что понятие об актуально бесконечно большом, т. е. понятие об актуально бесконечном множестве, на основе которого строятся трансфинитные числа, не только не является основой для обоснования допустимости понятия об актуально бесконечно малом, но служит инструментом для доказательства невозможности последнего. На основе своего доказательства Кантор делает вывод: «Не существует отличных от нуля линейных числовых величин (т. е. таких числовых величин, которые можно представить в образе ограниченных, непрерывных прямолинейных отрезков), которые были бы меньше, чем любая, произвольно малая конечная числовая величина, т. е. такие величины противоречат понятию линейной числовой величины» ([43], стр. 128).

Наоборот, понятие об актуально бесконечном множестве во второй половине XIX в. приобрело огромное значение как для математики, так и для науки вообще.

В логическом обосновании математического анализа оно было использовано для создания общей теории действительных чисел Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором. Актуальная бесконечность, под которой будет подразумеваться впредь современное понятие об актуально бесконечном множестве, является фундаментальным понятием содержательной теории множеств, при помощи которой пытались дать логическое обоснование всей математике. В современном классическом математическом анализе, как и в других областях математики, многие определения и доказательства предполагают допущение абстракции актуальной бесконечности.

Поэтому проблема бесконечного является одной из существенных проблем в обосновании математики, с которой связаны значительные трудности логического и гносеологического характера.

**Классификация направлений в основаниях математики в зависимости от отношения к абстракции актуальной бесконечности.** Различные направления в основаниях математики можно подразделить на две группы в зависимости от их отношения к допустимости использования абстракции актуальной бесконечности.

Направления первой группы характеризуются тем, что признают допустимость абстракции актуальной бесконечности. К этим направлениям относится теоретико-множественное направление Кантора, логицизм Фреге и Рассела, а также формализм Гильберта. Направления второй группы полностью отрицают правомерность использования абстракции актуальной бесконечности. В число этих направлений входят интуиционизм Брауэра и Вейля, конструктивное направление А. А. Маркова и Н. А. Шанина, ультраинтуиционистский подход и т. д. Так как нас интересует отношение проблем бесконечного к логике, то для нас существенной является именно такая классификация. Дело в том, что каждое из направлений в основаниях математики характеризуется не только его отношением к проблеме бесконечности, но и отношением к другим проблемам, например к определению понятия объекта, к пониманию существования этого объекта и т. д.

Несмотря на все различия между собой, направления первой группы признают «классическую» логику, а направления второй группы — конструктивную логику. Как «классическая», так и конструктивная логика характеризуется особой логической семантикой и особым логическим синтаксисом.

В § 1—3 было показано, какую роль играет допустимость или недопустимость понятия актуальной бесконечности для обоснования той или иной семантики (и соответствующего этой семантике синтаксиса). Допущение абстракции актуальной бесконечности дает возможность теоретико-множественной интерпретации формул классического исчисления предикатов ([8], § 37).

Современная конструктивная логика свою семантику строит, например, на основе понятия алгоритма, но не на теоретико-множественной основе.

Однако важным является не только сходство между различными направлениями в их отношении к бесконечному, но и их различия. Логицизм и формализм, признавая допустимость понятия актуальной бесконечности, имеют совершенно разный подход к проблеме бесконечности. Логицизм предполагает существование бесконечной области предметов в виде исходной посылки (аксиомы). Обусловлено это следующими соображениями: задача логицистов состояла в сведении математики к логике в том смысле, что каждое предложение, содержащее логические и математические понятия, переводится в предложение, содержащее одни логические понятия. Например, арифметическое сложение сводится к дизъюнкции, определенное число выражается как индивидуальный предикат от предикатов и т. д. При помощи логической символики выражаются понятия равночисленности и числа ([37], стр. 172—177). Если допустить конечность предметной области и давать формулам, выражающим числа, при оценке их истинности теоретико-множественную интерпретацию, то окажется, что все числа, бо́льшие, чем количество предметов в рассматриваемой области, будут равными.

Пусть, например, область состоит из 9 предметов. Тогда индивидуальные предикаты от предикатов, например 10 ($F$) и 11 ($F$), будут ложными при интерпретации предиката как некоторого множества, ибо у нас предметная область состоит всего из 9 предметов. Являясь ложными, эти формулы эквивалентны. Аналогичными свойствами будут обладать формулы, выражающие числа 12 ($F$), 13 ($F$),..., т. е. истинна формула $\forall F\ (P\ (F) \sim Q\ (F))$, где $P$ и $Q$ — предикаты, задающие числа, бо́льшие 9.

В обычной содержательной арифметике такое положение не имеет места, поэтому, чтобы устранить возникшую трудность, необходимо предположение о бесконечности предметной области. Рассел принимает аксиому бесконечности как некоторую гипотезу о мире. В этом, кстати, заключается одна из причин несостоятельности попытки Рассела свести математику к логике. У. Куайн считает, что в системе Рассела «наиболее уязвима аксиома бесконечности, которой Principia должна быть дополнена, если необходимо вывести определенные принятые в математике принципы» [44]. Аксиома бесконечности утверждает существование класса с бесконечным количеством членов. Подобная аксиома становится излишней, если имеются такие аксиомы, с помощью которых можно доказать существование бесконечного множества. При этом понятие бесконечности так же не элиминируется, как оно не элиминировалось при переходе к абстракции потенциальной осуществимости в методе исчерпывания. Оно только не выступает в явном виде, а содержится имплицитно. При необходимости из вышеупомянутых аксиом его так же можно извлечь, как всегда можно образовать бесконечный процесс на основе абстракции потенциальной осуществимости. Например, У. Куайн в New foundations for mathematical logic, показал, что с помощью ослабленной аксиомы свертывания (или аксиомы абстракции, как он ее называет)

$$(\exists x)\ (y)\ ((y \in x) \equiv \Phi),$$

где $\Phi$ — стратифицируемая формула[1], можно доказать существование бесконечного множества объектов $\Lambda$, $\{\Lambda\}$, $\{\{\Lambda\}\}$,... [44]. («$\Lambda$» обозначает пустое множество).

Таким образом, логицисты тем или иным путем полагают существование бесконечной области предметов, т. е. существование актуально бесконечного множества как некоторую гипотезу о мире.

Напротив, основоположник формализма Д. Гильберт не принимает гипотезы о существовании бесконечного множества предметов. Он пишет: «Теория обоснования Рассела и Уайтхеда есть общее, широко задуманное логическое исследование. В нем обоснование математики опира-

[1] О понятии стратификации см. [81], стр. 131—133.

ется, с одной стороны, на аксиому о бесконечности, а с другой — на так называемую аксиому редукции. Обе эти аксиомы суть в полном смысле слова гипотезы, содержательно не обоснованные доказательством их непротиворечивости, гипотезы, всеобщая справедливость которых под сомнением и в которых моя теория, во всяком случае, не нуждается» ([31], стр. 378).

Д. Гильберт в статье «О бесконечном» утверждает, что помимо нашего мышления нигде в природе бесконечное не существует. Он говорит, что физика опровергает гипотезу о бесконечной делимости, поэтому ничего непрерывного, континуального в мире нет, ибо все дискретно, квантовано. Никаких бесконечно малых в природе не существует. «Каждый раз получается тот итог,— пишет Гильберт,— что однородный континуум, который должен был бы допускать неограниченное деление и тем самым реализовать бесконечное в малом, в действительности нигде не встречается. Бесконечная делимость континуума — это операция, существующая только в человеческом представлении, это только идея, которая опровергается нашими наблюдениями над природой и опытами физики и химии» ([31], стр. 342). В реальном мире, по мнению Гильберта, нет не только ничего бесконечно *малого, но и бесконечно большого*. Этот тезис он связывает с результатами теории относительности Эйнштейна.

В нашу задачу не входит рассмотрение физического аспекта проблемы бесконечного (этот вопрос изложен в книге С. Т. Мелюхина [45]). Поэтому мы оставляем в стороне критический разбор взглядов Гильберта на бесконечность вселенной. Нам важно здесь отметить, что Гильберт, как и Аристотель, считал бесконечное не присущим природе, но, в отличие от Аристотеля, Гильберт считал важным для науки не только понятие потенциальной (становящейся) бесконечности, но и актуальной (завершенной) бесконечности.

«Итак,— говорит он,— мы установили конечность действительного в двух направлениях: в отношении бесконечно малого и бесконечно большого. Все же может случиться, что бесконечное в нашем мышлении занимает полноправное место и является необходимым понятием» ([31], стр. 343). Гильберт своей задачей ставит не простое принятие допустимости в математике абстракции бесконечности, а обоснование правомерности этой допустимости. При этом совершенно неважно, соответствует или нет что-либо в объективной реальности понятию о бесконечном, лишь бы оно не приводило к противоречиям в теории. Гильберт полагал, что бесконечного в природе нет, но в мышлении оно может быть не только допустимо как некоторое идеальное понятие, которому ничего не соответствует в объективной действительности, но даже необходимо. В частности, понятие актуальной бесконечности необходимо математике для выражения общих законов, для использования метода идеальных элементов (например, введения в геометрию понятия бесконечно удаленной точки), для математического анализа, для теории множеств (например, для построения трансфинитных чисел) и т. д.

Гильберт был уверен, что, после того как математика была избавлена от действительно противоречивого понятия актуально бесконечно малого ([31], стр. 383), бесконечность в форме бесконечного множества не может вызвать в математике противоречий. Во-первых, таких противоречий не возникает при оперировании над бесконечными множествами, практически встречающимися в математике (множествами натуральных, рациональных, действительных и комплексных чисел и т. п.) ([46], стр. 15). Во-вторых, содержательному понятию «бесконечное множество» можно придать такой смысл, что оно не будет противоречивым (см. выше, § 2). В-третьих, как говорит Гильберт, в противоречиях теории множеств повинно не понятие бесконечного множества и не применение закона исключенного третьего.

По словам Гильберта, «эти парадоксы происходят скорее потому, что пользуются недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий, которые в моей теории исключаются сами собой» ([31], стр. 383). Такими понятиями, например, являются понятие множества всех множеств и понятие множества всех чисел. Гильберт не отказывается от понятия актуальной бесконечности и не принимает эту абстракцию как некоторый постулат о действительном мире, а обосновывает допустимость его в математических рассуждениях путем доказательства непротиворечивости той теории, в которой оно применяется. Непротиворечивость теории Гильберт считает единственным необходимым условием допустимости всякого идеального понятия в этой теории («идеального образа»), в том числе и понятия бесконечности. С этой целью Гильберт развил теорию доказательства, осуществляющую основной его тезис о том, что «оперирование с бесконечным может стать надежным только через конечное ([31], стр. 364).

Осуществляя свой замысел, Гильберт все предложения «классической» математики делит на реальные и идеальные. Реальные (конечные) предложения имеют содержательный смысл. Такими конечными предложениями в арифметике являются предложения вида $2+3=5$, $5+7=7+5$, $1 \neq 1$, $3>2$, $3<2$ и т. д., которые содержат только числовые знаки. К ним применимы как закон противоречия, так и закон исключенного третьего. Идеальные предложения не имеют содержательного смысла. К ним относятся предложения, основанные на употреблении актуальной бесконечности.

По выражению Гильберта, «прыжок в трансфинитное» (в смысле завершенной бесконечности) совершается уже в суждениях существования, где «существует» понимается как бесконечная «или — связь». Например, предложение $\exists x\ (x>p)$, где $x$ — простое число, $p$ — самое большое из известных до сих пор простых чисел, принимается как альтернатива «*либо* $p+1$, *либо* $p+2$, *либо* $p+3, \ldots$ есть простое число». Подобное предложение не имеет конечного смысла; следует отметить, что в подобных предложениях существования Гильберта не видит только лишь конечного смысла, но не смысла вообще, как это мы видим у Кронекера и Брауэра.

«Вообще,— говорит Гильберт,— если исходить из конечной точки зрения, то высказывание вида «существует число, имеющее такое-то и такое-то свойство» имеет смысл только как частичное высказывание, т. е. как часть более определенного высказывания, более точное содержание которого, однако, для многих приложений не существенно» ([31], стр. 354).

К трансфинитному можно прийти и путем отрицания общего утверждения. Например, отрицание предложения $\mathfrak{A}+1=1+\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ есть любое число, является высказыванием о существовании такого $\mathfrak{A}^0$, что $\mathfrak{A}^0+1 \neq 1+\mathfrak{A}^0$, не имеющим конечного смысла, так как это высказывание означает обнаружение примера, противоречащего утверждению $\mathfrak{A}+1=1+\mathfrak{A}$, путем перебора всех чисел, что невозможно. Поэтому неверна альтернатива, выражающая то, что равенство $\mathfrak{A}+1=1+\mathfrak{A}$ либо выполняется для всякого числового знака, либо может быть опровергнуто противоречащим примером, т. е. альтернатива, являющаяся применением закона исключенного третьего. Но отказаться от закона исключенного третьего Гильберт считает невозможным, так как он необходим для построения математического анализа.

Возникшую трудность Гильберт предлагает устранить при помощи допущения идеальных высказываний. Ссылаясь на физику, он говорит, что не обязательно, чтоб все предложения теории имели смысл. Математическая теория может состоять из реальных и идеальных предложений. Тогда будут применимы законы аристотелевской логики, в том числе и закон исключенного третьего, ко всем предложениям (не только к реальным, но и к идеальным), так как законы логики и предложения арифметики станут чисто формальными образованиями, и будет несущественным, что отрицание предложения не имеет смысла. Более того, для развития самой теории и для доказательства ее непротиворечивости Гильберт предлагает абстрагироваться от смысла всех знаков вообще, как математических, так и логических, а также и от смысла всех предложений, а содержательные выводы заменить формальными. Важно лишь то, чтобы всегда можно было приписать смысл формулам, которым соответствуют реальные предложения.

Таким образом, для доказательства непротиворечивости Гильберт предлагает абстрагироваться от смысла как реальных предложений, имеющих конечный смысл (типа $2+3=$ $=3+2$ и т. д.), так и идеальных, не имеющих конечного смысла. Среди последних могут быть предложения, использующие абстракцию актуальной бесконечности (типа $a+1=$ $=1+a$, где $a$ принимает значения из множества действительных чисел) или вовсе не имеющие никакого смысла (например, предложение $a+1=1+a$, где знаки $a$, 1, $+$, $=$ и все предложение в целом не имеют никаких значений).

Если бы программа Гильберта была осуществлена, то тогда можно было бы сделать вывод о том, что независимо от того, пользуемся мы или не пользуемся понятием актуальной бесконечности, все равно это не приведет к противоречиям. Противоречие при этом понимается как вывод некоторой формулы вместе с ее отрицанием. Гильберт и его ученики Бернайс и Аккерман много труда потратили на доказательство непротиворечивости формальной арифметики с трансфинитной ε-аксиомой($A(a) \supset A(\varepsilon(A))$), где ε — трансфинитная логическая функция выбора (ε-функция). При помощи $\varepsilon$-аксиомы выводится как аксиома Аристотеля ($\forall x A(x) \supset A(a)$), так и закон исключенного третьего ($\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$), если принять определения $\forall x A(x) \rightleftharpoons A(\varepsilon(\neg A(x))$ и $\exists x A(x) \rightleftharpoons A(\varepsilon(A(x))$. Но в общем случае доказательство непротиворечивости получено не было [47].

После доказательства К. Гёделем в 1931 г. теоремы о неполноте стала ясна и причина неудач, постигших Рассела и Гильберта. Результаты Гёделя говорят о невозможности доказательства непротиворечивости арифметики методом Гильберта. Дело в том, что полностью формализовать даже арифметику натуральных чисел нельзя, ибо не существует непротиворечивой конечной системы аксиом, при помощи которой можно было бы формально доказать все те предложения, которые можно получить путем формализации содержательно истинных предложений обычной арифметики натуральных чисел.

Таким образом, обоснование правомерности понятия актуально бесконечного в математике методом формализации не имело успеха. К решению этого вопроса можно подойти с позиций диалектического материализма. Как уже отмечалось в § 2, понятие актуальной бесконечности действительно является «идеальным» или, лучше сказать, идеализированным понятием. Поэтому оно имеет только ограниченный и весьма приближенный характер соответствия с объективной реальностью. Это понятие может быть использовано и действительно используется наукой. Рамки пределов его допустимости ограничиваются определенными условиями, например допустимостью или недопустимостью неконструктивных доказательств, о чем подробнее будет сказано ниже. Решить раз навсегда и для всех случаев вопрос о правомерности понятия актуальной бесконечности школе Гильберта не удалось (во всяком случае, в том виде, в каком это намечалось программой Гильберта). Но в каждом конкретном случае этот вопрос разрешим.

Кроме того, практика решения математических проблем показывает, что понятие актуальной бесконечности не приводит к противоречиям, если им пользоваться, как иногда выражаются, в «разумных пределах». Конкретность истины и критерий практики при этом остаются определяющими факторами в решении вопроса о допустимости абстракции актуальной бесконечности в математике. Сам Гильберт фактически руководствовался требованиями конкретности истины. Поэтому он строго различал (формальную) математику и метаматематику. Если в математике он считал допустимой абстракцию актуальной бесконечности и закон исключенного третьего, то в метаматематике, которая должна обосновать эту допустимость, данные понятия уже не допускались Гильбертом, иначе никакого обоснования не получилось бы. Это лишний раз показывает, что допустимость абстракции актуальной бесконечности зависит от конкретных условий.

Представители второй группы направлений в основаниях математики вообще отрицают допустимость понятия актуальной бесконечности. Основной причиной такого отношения к понятию актуальной бесконечности является требование последовательной конструктивности в математике, а принятие абстракции актуальной бесконечности дает возможность проведения, например, неконструктивных доказательств, появления так называемых «чистых» теорем существования и построения таких неконструктивных объектов, какими являются бесконечные множества. Абстракция «абсолютной» осуществимости позволяет не только рассматривать как всегда осмысленное суждение существования, полученное путем отрицания суждения всеобщности, но и дает возможность сводить одно из них к другому. Иными словами, какова бы ни была область исследования (конечная или бесконечная), с точки зрения абсолютной осуществимости, всегда правомерны утверждения:

$$(\alpha) \quad \neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

(«утверждение о ложности того, что все предметы области значений переменной $x$ обладают свойством $P$, равносильно утверждению о существовании в этой области предметов, не обладающих свойством $P$») и

$$(\beta) \quad \neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

(«утверждение о ложности существования в области значений переменной $x$ предметов, обладающих свойством $P$, равносильно утверждению о том, что все предметы этой области не обладают свойством $P$»).

Отрицание общего предложения, таким образом, имеет смысл просто на основе того, что утверждение этого предложения приводит к противоречию; при этом может быть не только не дан противоречащий общему утверждению пример, но даже не дан способ (или алгорифм) его построения. Это возможно потому, что абстракция абсолютной осуществимости предполагает возможность обнаружить такой пример на основе перебора всего бесконечного множества, составляющего область значений $x$. Таким образом, эта абстракция предполагает всегда осуществимым самый «простой» (а практически самый неосуществимый) «алгорифм» — прямой «просмотр» всего бесконечного множества объектов. (Слово «алгорифм» взято здесь в кавычки потому, что его понимание принципиально отлично от понимания алгорифма как некоторого конструктивного предписания.)

Пусть, например, стоит задача исследовать, являются ли все действительные числа алгебраическими, т. е. истинно ли высказывание $\forall x A(x)$, где $x$ — переменная для действительных чисел, а $A$ означает свойство быть алгебраическим числом. Как известно, предположение истинности $\forall x A(x)$ приводит к противоречию на основе сопоставления мощностей множества действительных и алгебраических чисел без указания примера неалгебраического числа.

Из этого факта мы заключаем, что $\neg \forall x A(x)$ истинно. Можно ли из этого же факта сделать заключение, что $\exists x \neg A(x)$ истинно? Само доказательство не дает ни примера действительного числа $a$, такого, что $\neg A(a)$ истинно, ни способа его построения. Но если установлено, что $\neg \forall x A(x)$ истинно, и если предполагается возможность «исследовать» все бесконечное множество действительных чисел, то непременно будет установлено, что $\exists x \neg A(x)$ истинно.

Напоминаем, что термины «исследование бесконечного множества», «просмотр бесконечного множества» не следует понимать как завершение исследования (просмотра) бесконечного ряда. Более или менее наглядно представить себе смысл этих операций вообще невозможно, ибо способа их осуществления нет и быть не может. Однако мыслить их все же можно, как и всякий объект, определение которого не ведет к противоречию.

Таким образом, абстракция абсолютной осуществимости существенна для сведения отрицания общего суждения к суждению существования. Очевидно, что такое сведение не конструктивно. Но в некоторых случаях из неконструктивного доказательства существования можно извлечь конструктивное.

Представители второй группы направлений не признают ни абстракции актуальной бесконечности, ни связанных с ней неконструктивных доказательств и неконструктивных объектов вообще; поэтому, с их точки зрения, не может быть произведено сведе́ние отрицания суждений общности к суждениям существования. Согласно пониманию общего суждения и суждения существования Г. Вейлем, отрицание общего суждения вообще не имеет смысла. По интерпретации общих и экзистенциальных суждений, данной А. Н. Колмогоровым, отрицание общего суждения имеет смысл, но не сводимо к экзистенциальному суждению.

Действительно, если истинность высказывания $\forall x \mathfrak{A}(x)$ означает указание общего метода для решения проблемы $\mathfrak{A}(x)$, для каждого произвольного $x$, то $\neg \forall x \mathfrak{A}(x)$ вовсе не говорит о том, что возможно указать определенное $x$, для которого решена проблема $\neg \mathfrak{A}$.

Аналогичная ситуация имеет место, если общие и экзистенциальные суждения понимать на основе уточнения понятия «общего метода» с помощью понятия алгорифма.

Требование конструктивности в понимании математических суждений, условие обязательной конструктивности доказательств являются теми существенными аргументами, которые приводятся против использования абстракции актуальной бесконечности. Поэтому вопрос о правомерности использования абстракции актуальной бесконечности фактически упирается в другой, более глубокий и более широкий вопрос о правомерности неконструктивных методов и допустимости неконструктивных объектов.

ГЛАВА ВТОРАЯ

# ПРОБЛЕМА ЛОГИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕГО АБСТРАКЦИИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

## § 1. Анализ некоторых современных концепций отображения движения зарубежных авторов

**Введение.** Точные науки (механика, физика, кибернетика и т. п.) нуждаются в точном описании свойств движения. В этих целях используются математические абстракции, в том числе и абстракции бесконечности (главным образом потенциальной и актуальной). Описания движения с помощью математических абстракций представляют абстрактные математические модели движения.

Абстракции бесконечности особую роль играют при описании такого свойства движения, как непрерывность. Уже древнегреческие философы и математики хорошо осознавали, что без абстракций бесконечности описать непрерывность невозможно. Этот тезис остается в силе и по сегодняшний день — с той лишь разницей, что изменились старые и появились новые понятия непрерывности и бесконечности. Однако использование абстракций бесконечности при описании движения приводит к ряду логических и гносеологических трудностей, примером которых являются апории Зенона. Поэтому встает задача преодоления этих трудностей.

Различные философские школы по-разному решают вопросы о способах преодоления трудностей логического отображения движения. На основе анализа некоторых из них, по нашему мнению, наиболее характерных для понимания существа дела, мы покажем, что отсутствие диалектико-материалистического понимания характера отображения движения заводит эти решения в тупик.

В этом отношении характерна дискуссия о парадоксах Зенона, развернувшаяся в 1951—1952 гг. на страницах журнала «Analysis», в которой приняли участие Макс Блэк [48], Рихард Тейлор [49], Адольф Грюнбаум [50], Уиздом

[51] и другие ученые, занимающиеся философскими вопросами математики, в том числе вопросами, связанными с математическими моделями движения.

Рассмотрим два основных направления в решении трудностей, связанных с анализом движения и его пространственно-временных и других свойств. Главным спорным вопросом является вопрос о математическом описании такого важного свойства движения, каким является непрерывность. Описание непрерывности движения в свою очередь требует описания непрерывности времени и пространства.

Как известно, давно существуют математические понятия непрерывности, определяемые с помощью абстракций бесконечности. Проблема заключается в том, правомерно ли эти понятия непрерывности использовать для описания непрерывности движения. Особо остро обсуждался вопрос о правомерности использования абстракции актуальной бесконечности для описания непрерывности таких свойств движения, как пространство и время. Разные направления на этот вопрос давали порой прямо противоположные ответы.

Одно из этих направлений можно называть при буквальном переводе с английского языка направлением «сторонников канторовской непрерывности» (или канторовского континуума). Несмотря на разнообразие теорий, принадлежащих к этому направлению, решение противоречий, возникающих между математическим описанием движения и чувственно данными представлениями о движении, его сторонники мыслят путем доказательства того, что реальное движение в точности соответствует математическому описанию движения, использующему «канторовскую непрерывность», основанную на понятии актуальной бесконечности.

Другое направление называется — при буквальном переводе — направлением сторонников «чувственно данной непрерывности» или, как говорит Рассел, «данного в опыте континуума». Представители этого направления утверждают, что канторовская непрерывность не соответствует реальной непрерывности пространства и времени, поэтому при описании движения и его свойств нужно отбросить канторовскую непрерывность и дать описание непрерывности, согласующееся с данными наших ощущений. Это описание дается либо чисто содержательно, либо даже в виде формальной аксиоматической теории, которую можно интерпретировать в области чувственно данных нам свойств движения, например, как непрерывность пространства и времени.

Критическое рассмотрение этих направлений мы начнем с обсуждения работ Рассела ([52, [53]), который хотя и примыкает к сторонникам «канторовской непрерывности», но в то же время не отвергает концепцию «чувственно данной непрерывности». Более того, можно сказать, что Рассел является в некотором смысле представителем обоих этих направлений, концепции которых пытается согласовать.

Другие авторы уже более категорически высказываются в пользу какого-либо одного из направлений.

**Анализ концепции Б. Рассела.** Различные определения непрерывности, необходимые для описания движения, Рассел рассматривает как возможные гипотезы о свойствах реального движения, т. е. как их возможные модели.

Прежде чем исследовать вопрос о том, какая из этих гипотез более соответствует непрерывности реального чувственно данного нам движения («непрерывности чувственно данных изменений»), Рассел решает вопрос о логической непротиворечности этих гипотез. Противоречивые гипотезы, естественно, сразу же должны быть отброшены как заведомо не могущие быть моделями, а из непротиворечивых, по мнению Рассела, надо выбрать такую, которая бы если и не подтверждалась, то уж во всяком случае не опровергалась бы чувственными данными и была бы удобна в техническом отношении. Формулировка гипотез о непрерывности зависит от понимания сущности движения и от способа его анализа.

Движение Рассел определяет как некоторую функцию, выражающую отношение между определенными «местами» в пространстве и определенными «периодами (промежутками) времени». Таким образом, Рассел фактически анализирует кинетическое движение. Причем термин «функция» понимается им в обычном теоретико-множественном смысле. Теория движения описывает движение как много-однозначное отношение всех периодов времени к некоторым местам, или, иначе — всех членов непрерывного одномерного множества $t$ к некоторым членам непрерывного трехмерного множества $S$. «Движение состоит в широком смысле в соотнесении различных членов множества $t$ с различными членами множества $S$» ([53], стр. 473).

Покой, так же как и движение, выражается некоторой функцией. Движение считается непрерывным, если и только если эта функция непрерывна. Иначе говоря, положение движущегося тела должно быть непрерывной функцией времени.

Тогда встает вопрос, как осуществить анализ времени и пространства, как произвести их расчленение, чтобы дать анализ непрерывности движения. Для этого надо вложить точный смысл в понятия «место в пространстве» и «промежуток времени», которые иногда именуют соответственно точками и моментами. Когда известны определенные свойства или отношения этих моментов и точек к объектам, которые мы расчленяем на точки и моменты, можно дать определение непрерывности данных объектов.

Рассел рассматривает следующие возможные уточнения понятий точки и момента:

1) точки и моменты — это конечные, пусть чрезвычайно малые, протяженности в пространстве и длительности во времени;

2) точки и моменты — это актуально бесконечно малые протяженности и длительности;

3) точки и моменты — это группы событий, не различимые друг от друга, но отличимые от других событий (или разновременные с другими событиями, не принадлежащими данной группе событий);

4) точки и моменты—это не имеющие измерений объекты.

Прежде всего нужно сказать, что Рассел высмеивает, как он выражается, «героические методы решения трудностей непрерывности движения», которые предлагал Бергсон. (Бергсон рассматривал движение как не подлежащее вообще никакому анализу единое целое.)

С точки зрения Рассела, не всякий анализ движения и его свойств приемлем. Анализ, проведенный на основе первого уточнения понятий точки и момента, дает возможность сделать вывод о том, что конечные промежутки пути и времени состоят из конечного числа точек и моментов. При этом движение точки является рядом мгновенных скачков, что, по мнению Рассела, заведомо неприемлемо. Описание непрерывности требует расчленения отрезка пространства или времени на бесконечное число частей. Но и не всякое бесконечное расчленение может быть удовлетворительным.

Рассел доказывает, что невозможно дать непротиворечивое определение непрерывности на основе второго уточнения понятий точки и момента, которое заключается в расчленении пространства и времени на актуально бесконечно малые. В связи с этим он критикует концепцию Когена (Cohen), у которого непрерывное состоит из актуально бесконечно малых. Бесконечно малые $dy$ и $dx$ не являются точками и моментами, не имеющими протяжения, ибо они не равны нулю, и в то же время они не являются расстояниями между точками и моментами, так как последние есть всегда конечные величины, а $dy$ и $dx$ не относятся к классу конечных величин. Никакого реального смысла нельзя вложить в понятие актуально бесконечно малого, которое к тому же самопротиворечиво.

С помощью бесконечно малых, согласно Б. Расселу, непрерывность определить нельзя. Так, если предположить, что отрезок (промежуток времени) состоит из бесконечно малых, то $x$ и $x+dx$ будут последовательными моментами времени.

Пусть $y$ — непрерывная функция $x$. Тогда $y$ и $y+dy$ будут последовательными расстояниями от оси $x$. Стало быть, значения этой функции с изменением $x$ будут перескакивать через средние значения, а непрерывность как раз и заключается в том, что переменная должна принимать все средние значения, хотя и не имеется непосредственно следующего значения, которое принимает переменная впервые после первоначального значения.

Бесконечно малые, кроме того, не обеспечивают «непрерывности высшего порядка», т. е. непрерывности в обычном смысле, которой обладают лишь множества несчетной мощности (под «непрерывностью низшего порядка» Рассел понимает свойство плотности, присущее и счетным множествам). Непрерывное множество обладает свойством связности. Если же допустить актуально бесконечно малые, то не будет выполняться условие связности.

Приведем доказательство этого утверждения. Множество $T$ называется *связной* совокупностью точек, если для любых двух точек $t$ и $t'$ множества $T$ и для наперед заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon$ всегда существует конечное число точек $t_1$, $t_2$, ... $t_k$, принадлежащих $T$, таких, что расстояния $tt_1$, $t_1t_2$, $t_2t_3$,..., $t_kt'$ все будут меньше $\varepsilon$.

Допустим, что существуют бесконечно малые расстояния, не подчиняющиеся аксиоме Архимеда. Пусть $\varepsilon$ будет расстоянием этого рода, т. е. для любого конечного $n$ $n\varepsilon < tt'$; тогда условие связности не будет выполнено, ибо $tt_1$, $t_1t_2$,... ...,$t_kt'$ не могут быть меньше $\varepsilon$. Поэтому, делает вывод Рассел, бесконечно малые не обеспечивают непрерывности, а непрерывность в свою очередь не требует бесконечно малых.

Рассмотрим третье уточнение понятий точки и момента, данное Расселом. В этом случае движение частицы в данный момент рассматривается как группа событий. Под событием Рассел, вероятно, понимает то же, что под событием понимается в современной теории относительности. Понятие это логически не определяется, но разъясняется на примерах. В качестве примера Рассел приводит изменение цветов поверхности (спектра цветов), состоящей из «точечных» поверхностей. Под непрерывностью пространства и времени понимается, с одной стороны, непрерывность, данная в ощущениях, или «данный в опыте континуум», а с другой — непрерывность (не данных в ощущении) событий, составляющих непрерывное множество «низшей непрерывности» по Расселу.

Как же в таком случае согласовать непрерывность времени, пространства и движения, если, с одной стороны, они расчленены на моменты, а с другой — на события? Рассел говорит, что это не простая задача, ибо то, что мы знаем о «данном в опыте континууме», характеризует его лишь отрицательным образом, со стороны того, чем он не обладает. Первым таким свойством является отсутствие различий между моментами. Например, мы не различаем цвет $A$ от цвета $B$, цвет $B$ от цвета $C$, но различаем цвет $A$ от цвета $C$. Сами цвета состоят из «точечных» событий. Неразличимость моментов — это негативный фактор.

Рассел, сформулировав содержательным образом утверждения о «данном в опыте континууме» т. е. об эмпирически данной нам непрерывности, утверждает, что описание этой непрерывности можно согласовать с описанием канторовской непрерывности. Это утверждение можно проверить точными методами. Оказывается, что оно действительно справедливо. Однако можно показать, что оно не имеет того философского смысла, который ему приписывает Рассел. Чтобы проверить утверждение Рассела, надо выразить данное им описание непрерывности в виде предложений некоторого точно построенного языка и доказать непротиворечивость системы этих предложений.

Это можно сделать при помощи арифметической интерпретации.

Обозначим н е р а з л и ч и м о с т ь  с о б ы т и й во времени (одновременность) и в пространстве знаком «$\sim$», а н е р а з л и ч и м о с т ь  м о м е н т о в — знаком «$\simeq$». Различимость понимается как отрицание утверждения о неразличимости. Обозначим символом «$\prec$» предшествование событий и моментов во времени и в пространстве. Затем обозначим буквами $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$,... события, буквами $X$, $Y$, $Z$,... — моменты (группы событий). Тогда вышеописанное свойство непрерывности моментов выразится предложениями:

$$(R1)\ ((X \simeq Y) \vee \neg(X \simeq Y)),$$

$$(R2)\ \exists X \exists Y \exists Z (X \simeq Y \& Y \simeq Z \& \neg(X \simeq Z)).$$

Рассел далее пишет: «Если построить относительную теорию моментов, в которой «момент» определяется как группа событий, одновременных друг с другом, но вовсе не одновременных с любым событием вне этой группы, и если получаемое нами множество событий будет плотным, то возможно, что если $X$ всецело предшествует $Y$, то найдется событие $Z$, одновременное с частью $X$, которое целиком предшествует некоторому событию, всецело предшествующему $Y$» ([52], стр. 155). Это условие можно выразить посредством предложения: если момент есть множество неразличимых событий, то это равносильно утверждению о том, что если два события принадлежат одному моменту, то они неразличимы. Запишем это предложение в виде

$$(R3)\ \forall x \forall y (x \in X \& y \in X \supset x \sim y).$$

То, что момент содержит бесконечное множество событий, запишем выражением ($R4$): «Множество событий, принадлежащих моменту, „плотно"»,

$$(R5)\ (X \prec Y \supset \exists z \exists p \exists q (z \in X \& q \in Y \& z \prec p \& p \prec q)).$$

Смысл этого выражения состоит в том, что множества $X$ и $Y$ не пересекаются и все события множества $X$ предшествуют событию $p$, которое предшествует всем событиям множества $Y$. Если бы $p \in X \vee p \in Y$, то $p \sim z \vee p \sim q$, что несовместимо с тем, что $z \prec p$ и $p \prec q$, ибо неявно подразумевается предложение

$$(R6)\ \forall x \forall y (x \sim y \dot{\vee} x \prec y \dot{\vee} y \prec x).$$

(Знак $\dot{\vee}$ означает строгую дизъюнкцию.) Дадим предложениям ($R1$) — ($R6$) арифметическую интерпретацию. Для этого введем следующие обозначения и определения:

Пусть переменные для событий $x, y, z, p, q, x_1, \ldots, q_1, x_2, \ldots, x_n$ будут теперь переменными, принимающими значения рациональных чисел.

Переменные для моментов $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n, \ldots$ переименуем соответственно в $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i \ldots$ . Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots$ будут теперь множествами рациональных чисел, определяемыми следующим образом:

$$X_i \rightleftharpoons [i,\ i+1),$$

где $[\ i,\ i+1)$ означает полуинтервал рациональных чисел, т.е. совокупность всех рациональных чисел $r$, удовлетворяющих неравенствам $i \leqslant r < i+1$, где $i$ — рациональное число. Пусть $f, j$ означают также рациональные числа. Тогда дадим отношениям неразличимости событий и неразличимости моментов арифметическую интерпретацию с помощью следующих определений:

$$x \sim y \rightleftharpoons |x-y| \leqslant 1,$$
$$x \prec y \rightleftharpoons (y-x) > 1,$$
$$X_i \simeq X_f \rightleftharpoons |f-i| \leqslant 1,$$
$$X_i \prec X_f \rightleftharpoons (f-i) > 1,$$
$$x \in X_i \rightleftharpoons i \leqslant x < i+1.$$

В этой интерпретации предложения $(R1)$ — $(R6)$ обратятся в истинные предложения арифметики рациональных чисел. Проверим это. Пусть индекс «и» над правой скобкой означает предложение, полученное в результате интерпретации одного из предложений $(R1)$ — $(R6)$; тогда интерпретированными предложениями будут предложения $(R1)^{и}$ — $(R6)^{и}$, приобретающие после интерпретации следующий вид:

$$(R1)^{и} \cdot |i-f| \leqslant 1 \vee |i-f| > 1.$$

Истинность $(R1)$ как предложения арифметики очевидна, так как разность любых рациональных чисел либо меньше или равна 1, либо больше 1.

$$(R2)^{и} \cdot \exists i \exists f \exists j\, (|i-f| \leqslant 1 \,\&\, |f-j| \leqslant 1 \,\&\, \neg\, (|i-j| \leqslant 1)).$$

Такие рациональные числа $i, f, j$ действительно существуют, так как их можно просто привести в качестве примера. Пусть это будут числа $i,\ f=i+1,\ j=i+2$. Тогда $|i-f| = |i-(i+1)| \leqslant 1; |f-j| = |(i+1)-(i+2)| \leqslant 1;$

$|i-j| = |i-(i+2)| > 1$, что равносильно утверждению $\neg(|i-j| \leqslant 1)$.

$(R3)^{\text{и}} \cdot \forall x \forall y\, (i \leqslant x < (i+1)\, \&\, i \leqslant y < (i+1) \supset |x-y| \leqslant 1)$.

Допустим, что антецедент импликации истинен, и покажем, что тогда истинен консеквент, а значит, истинна и вся импликация.

Возьмем случай, когда $x = i$, $y = i+1$, тогда $|x-y| = 1$. Но $y < i+1$, значит $|x-y| < 1$, т. е. истинно, что $|x-y| \leqslant 1$.

$(R4)^{\text{и}}$ «$X_i$ — плотное множество».

Это утверждение истинно, так как упорядоченное множество рациональных чисел полуинтервала $[i, i+1)$ обладает свойством, заключающемся в том, что между любыми двумя числами существует по крайней мере еще одно рациональное число, а значит, и бесконечно много рациональных чисел.

$$(R5)^{\text{и}} \cdot (j-i) > 1 \supset \exists z \exists p \exists q\, (i \leqslant z < (i+1)\, \&$$
$$\&\, i \leqslant q < [(j+1)\, \&\, z < p\, \&\, p < q).$$

Допустим, что антецедент импликации истинен. Тогда $j > i+1$. Пусть $j-(i+1) = \alpha$, т. е. $j = i+1+\alpha$. $i+1+\alpha \leqslant q < i+2+\alpha$. В этом случае действительно существуют рациональные числа $z$, $p$, $q$, удовлетворяющие условиям консеквента. Эти числа следующие: $z = i$, $p = i+1+\frac{\alpha}{2^2}$; $q = i+2+\frac{\alpha}{2}$.

Проверим наше утверждение:

$$i \leqslant i < i+1;\ i+1+\alpha \leqslant i+2+\frac{\alpha}{2} < i+2+\alpha;$$

$$p-z = i+1+\frac{\alpha}{2^2}-i > 1;\ q-p = \left(i+2+\frac{\alpha}{2}\right)-$$
$$-\left(i+1+\frac{\alpha}{2^2}\right) = 1+\frac{\alpha}{2^2} > 1.$$

$$(R\,6)^{\text{и}}\, \forall x\, \forall y\, [\,|x-y| \leqslant 1 \vee (y-x) > 1 \vee (x-y) > 1.$$

Истинность данного предложения очевидна.

Таким образом, мы показали непротиворечивость системы предложений $(R1)$ — $(R6)$. Из этого факта, по нашему мнению, следуют некоторые выводы, важность которых будет особенно хорошо видна после анализа концепций Ширайши и Грюнбаума.

Предложения $(R4)$, $(R6)$ говорят нам о том, что множества событий, составляющих моменты, являются упорядоченными плотными множествами, т. е. имеют «низшую степень непрерывности» по Расселу. Так как наша интерпретация не зависит от свойств самих множеств событий и имеет дело только с индексами этих множеств, то она оставалась бы в силе, если бы множества событий обладали «высшей непрерывностью» по Расселу, т. е. непрерывностью в смысле Кантора или Дедекинда.

Предложения ($R1$), ($R2$), ($R3$), ($R5$) описывают «данный в опыте континуум» т. е. непрерывность, понимаемую на основе неразличимости. Непротиворечивость системы предложений ($R1$) $\sim$ ($R6$) показывает, что описания обоих видов непрерывности можно согласовать. Как мы увидим в дальнейшем, Ширайши отвергает канторовский континуум и признает лишь «данный в опыте континуум», который он называет «непрерывностью психологического опыта и физического мира» и описывает его аксиоматически.

Грюнбаум, напротив, признает только канторовский континуум, заявляя, что этого понятия вполне достаточно для описания физического мира, под которым он имеет в виду представления о физическом мире, даваемые теорией относительности.

Рассел не придерживается таких крайних позиций, он считает более приемлемым понятие «низшей непрерывности», которое, по его мнению, во-первых, проще других понятий непрерывности, а во-вторых, является достаточным для разрешения трудностей отображения движения.

Заметим, что предложения ($R1$) — ($R6$) надо рассматривать как схемы, введя понятие уровня неразличимости путем приписывания символу $\approx$ индекса $n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Четвертое уточнение понятий точки и момента, принимаемое Расселом в качестве возможной гипотезы о реальном мире, подразумевает под точкой и моментом объекты, не имеющие измерений. Пространство и время при этом мыслятся состоящими из бесконечного континуального множества таких элементов.

Кантор дал непротиворечивое определение континуума, говорит Рассел, пригодное для геометрии и динамики, и этим сделал революцию в философии пространства, времени и движения ([60], стр. 353).

Но определение континуума по Кантору или Дедекинду предполагает понятие актуальной бесконечности. Рассел показывает, что это понятие непротиворечиво, если только не путать понятие завершенности бесконечного множества с понятием завершения пересчета членов этого множества. Одно понятие не зависит от другого, поэтому бесконечное множество нет необходимости мыслить как возникшее в результате завершения незавершаемого никогда процесса. Другие «трудности» (скажем, эквивалентность правильной части множества всему множеству), связанные с рассмотрением бесконечных множеств, являются результатом предубеждений, так что их можно просто игнорировать.

Остается трудность, касающаяся очень широких бесконечных классов, но не бесконечности вообще. Эту трудность Рассел решает устранением понятия «тотальности вещей», понятия «всеохватывающего универсума», которое действительно противоречиво. В геометрии непрерывность метрического пространства постулируется аксиомами непрерывности (аксиомы Кантора или Дедекинда), которые не выводимы из других аксиом.

Но является ли существующая непрерывность реального пространства канторовской? Рассел на этот вопрос отвечает: «... мы не можем доказать, что наше реальное пространство должно быть непрерывным, но мы можем доказать, что оно не таково, и мы можем доказать, что непрерывное пространство не должно отличаться каким-либо могущим быть нами обнаруженным образом от того пространства, в котором мы живем» ([53], стр. 442).

Геометрическое пространство эмпирически нельзя отличить от реального пространства. Так как это утверждение не влечет за собой противоречий, то, по мнению Рассела, можно утверждать, что пространство является совокупностью точек, а геометрическая теория адекватно отражает свойства и отношения этого пространства. Так как пространство, состоящее из точек, мыслится непротиворечивым образом, то нет никаких возражений против того, что действительное пространство не таково. Такое пространство логически возможно к тому же теория, его описывающая, технически более проста, чем какая-либо другая. Поэтому Рассел принимает эту теорию как теорию, адекватно описывающую реальное пространство. На такой основе он легко «разрешает» парадоксы Зенона.

По существу у Рассела проявляется чисто конвенционалистский подход к разрешению трудностей отображения движения. Действительно, проще всего объявить реальный мир устроенным так, как об этом говорит некоторая непротиворечивая теория. Однако подобных теорий много. Из них

Рассел предлагает выбрать по соглашению ту, которая технически проще. Никаких понятий, кроме тех, что определены в арифметике, по его мнению, не требуется для отображения непрерывности пространства. Поэтому, говорит он, «... аргументы Зенона, в большинстве своем веские, не поднимают серьезных трудностей» ([53], стр. 368), трудности непрерывности и бесконечности он считает отошедшими в прошлое. Надо только отбросить бесконечно малые, определить непрерывность и бесконечность непротиворечивым образом и разрешить все зеноновские апории. В данном случае Рассел отождествляет чисто математический аспект разрешения трудностей отображения движения с разрешением этих трудностей вообще, которое необходимо включает и гносеологический аспект.

Апория «Дихотомия» решается Расселом с помощью различения интенсионального и экстенсионального определения класса и принятия понятия завершенного множества, данного путем интенсионального определения и отбрасывания понимания построения членов этого множества в результате окончания бесконечного процесса. Установление взаимно однозначного соответствия между элементами бесконечных классов, один из которых является правильной частью другого, разрешает апорию «Ахиллес».

Апория «Стрела» решается, как говорит Рассел, с помощью «статической теории переменной». Идея этого решения состоит в следующем: так как можно непротиворечиво мыслить переменную, значениями которой являются константы, то и изменение (движение) можно мыслить состоящим из состояний, в которых нет изменения. Но трудность как раз в том и состоит, что неясно, каким образом при таких условиях движущаяся частица может попадать из одного положения в другое. Противоречия как раз возникают при попытке «снять» эту трудность. Рассел просто считает ее не существующей благодаря выдвинутому им способу решения чисто математического и логического аспектов зеноновских парадоксов, но не «снимает» этой трудности на самом деле, ибо принимает за решенный самый трудный в настоящее время — гносеологический аспект.

Математическое описание непрерывности говорит о том, что никакая точка (или момент) не имеет непосредственно следующего момента. Рассел считает, что реальное движение должно согласовываться с такой непрерывностью, что непрерывность движения не должна предполагаться в занятии телом последовательных положений в последовательные моменты времени. И если бы движение заключалось в занятии последовательных положений в последовательные моменты времени, то парадоксы Зенона были бы неизбежными. В частности, был бы неизбежен парадокс типа зеноновской апории «Стадий», отрицающий возможность различных скоростей. Но, с другой стороны, мы не можем представить непрерывного движения частицы, не сказав, что частица проходит из одного положения в другое через весь бесконечный ряд точек или моментов между двумя концами дистанции.

Математическая теория просто отвлекается от этого положения, оно для нее несущественно. Но если мы хотим понять сущность движения, то от нее так же нельзя отвлечься, как и от математического описания. Ни одна из этих сторон, выражающих как прерывность, так и непрерывность движения, сама по себе не дает сущности движения. В этом отношении Гегель очень правильно писал следующее: «...движение, как понятие, как мысль, высказывается в виде единства отрицательности и непрерывности, но ни непрерывность, ни прерывность (дословно, точечность) самих по себе (в отдельности) нельзя полагать в качестве сущности...». Эти слова выписаны Лениным при конспектировании лекций Гегеля ([3], стр. 266).

Конечно, иметь дело с одной стороной, отражающей «остановленное» движение, проще. На этот путь и становится Рассел. Но таким путем мы не придем к пониманию сущности движения как единства непрерывности и прерывности.

Рассел, конечно, не отрицает того, что математическое описание упрощает действительную картину движения. Перед ним естественно возникает вопрос, могут ли вещи в пространстве и во времени состоять из непротяженных точек и моментов. Он говорит, что фактически ни точки, ни моменты не существуют, что это только удобные гипотезы, но не фикции, ибо они могут быть интерпретированы как конечные объекты. Однако, предлагая принять математический континуум в качестве адекватного чувственно данным фактам, он встречается с серьезными трудностями. Он говорит, что разумно предположить, что такие чувственно данные, как цвета, веса, действительно составляют плотное множество. «Нет, следовательно, возражений, которые могут быть даны с психологической точки зрения против математической теории движения» ([52], стр. 149).

Нет оснований полагать, говорит он, что действительный мир не континуален. Гипотеза континуальности не противоречит ни фактам, ни логике и к тому же технически проще, чем другие допустимые гипотезы. Поэтому Рассел ее и принимает. Тем более, что континуальность пространства и времени (имеется в виду «низшая ступень» континуальности) согласуется, по Расселу, с «данным в опыте континуумом», о чем уже было сказано выше.

Данная нами арифметическая интерпретация показывает, что в этом отношении Рассел прав. Неправ он в том, что пытается доказать удовлетворительность одностороннего подхода (чисто логико-математического) к анализу сущности движения, принимая гносеологический аспект тривиально разрешенным. Такой подход к трудностям отображения движения Рассела (а также у Пирса, Уайтхеда, Тейлора, Грюнбаума, Вейтлинга) послужил основой для чисто математической точки зрения на разрешение парадоксов движения. Парадоксы формулируются на математическом языке, показывается, что на базе определенной непротиворечивой теории можно в каждом случае дать однозначное решение, и никаких затруднений не остается.

Рассел показал возможность дать математические описания как непрерывности, основанной на абстракции актуальной бесконечности (непрерывности событий), так и непрерывности, использующей абстракцию потенциальной бесконечности (непрерывности моментов). Он высказал гипотезу о совместности описаний этих видов непрерывности, которую действительно можно доказать.

Однако из этого вовсе не следует, что Рассел разрешил все трудности отображения движения, в том числе и парадоксы Зенона — даже в чисто логико-математическом их аспекте. Просто Рассел принимает теорию точечных множеств, истолковывает апории Зенона на теоретико-множественном языке и показывает, что при этом истолковании получаются истинные теоретико-множественные предложения.

Как известно, обоснование теории множеств, с точки зрения которой решаются Расселом апории Зенона, вызывает в свою очередь еще большие затруднения. На самом деле Рассел разрешает логико-математические трудности отображения движения за счет отодвижения их в предпосылки теории множеств. Поэтому их нельзя считать окончательно разрешенными, как это представляет себе Рассел. Обоснование того факта, что трудности одной теории разрешаются с точки зрения более сильной теории путем отодвижения их в предпосылки последней теории, дано С. А. Яновской (см., например, [54], [58]).

В современной литературе, в том числе зарубежной, подобный подход подвергается разносторонней критике. Высказывается даже такая точка зрения, что математическая бесконечность и непрерывность вообще не могут быть применимы для описания движения. На этой точке зрения стоят Макс Блэк [48], Томас [55], Уиздом [51], Вайсман [56], Садео Шираиши [57] и другие авторы.

**Аксиоматическая теория непрерывности Садео Шираиши.** Примером использования абстракции потенциальной бесконечности для описания «чувственно данной непрерывности» пространства, времени и движения является аксиоматическая теория непрерывности Садео Шираиши ([57], стр. 56).

Шираиши выступает против канторовской непрерывности движения, с одной стороны, и против «простой непрерывности движения» в смысле Бергсона — с другой. Шираиши ставит задачу дать новое понятие «непрерывности психологического опыта и физического мира», свойства которой описываются аксиоматически. Для этого он формулирует аксиомы «неопределенной непрерывности» («indefinite continuity») движения и утверждает, что против этой системы нельзя возражать, ибо она непротиворечива. Последнее действительно можно доказать (доказательство непротиворечивости этой системы путем арифметической интерпретации предложено С. А. Яновской; см. [58], стр. 130—131).

При определенной интерпретации эту систему можно назвать воплощением той «визуальной геометрии», о которой говорил Вайсман [56] и особенностью которой является наличие правила нетранзитивности.

Встает вопрос о том, избавляет ли предложенное Шираиши *понимание непрерывности* от трудностей подобных тем, которые связаны с канторовской непрерывностью при отображении движения. Чтобы обсудить этот вопрос, приведем саму систему аксиом Шираиши, причем, в отличие от Шираиши, мы будем, где это необходимо, применять логические символы. Чтение знаков таково: буквы $A$, $B$, $C$, $D$,... читаются «точка «$A$», «точка $B$» и т. д.

$A \prec B$ читается: «точка $A$ перед точкой $B$»,
$A \succ B$ читается: «точка $A$ после точки $B$»,
$A \sim B$ читается: «точка $A$ неотличима от точки $B$».

Аксиомы:

$$(\text{Ш}1)\ (A \sim B \mathbin{\dot\vee} A \prec B \mathbin{\dot\vee} A \succ B);$$

$$(\text{Ш}2)\ (A \prec B \equiv B \succ A);$$

$$(\text{Ш}3)\ (A \sim A);$$

$$(\text{Ш}4)\ (A \sim B \supset B \sim A);$$

$$(\text{Ш}5)\ (A \prec B \& B \prec C \supset A \prec C);$$

$$(\text{Ш}6)\ (A \succ B \& B \succ C \supset A \succ C);$$

$$(\text{Ш}7)\ \exists A \exists B \exists C (A \sim B \& B \sim C \& \neg (A \sim C));$$

$$(\text{Ш}8)\ (A \prec C \& A \sim B \& B \sim C \supset \exists D (D \sim A \& A \sim B \& D \prec B));$$

$$(\text{Ш}9)\ (A \succ C \& A \sim B \& B \sim C \supset \exists D (D \sim A \& A \sim B \& D \succ B));$$

(Ш10) Если $A \prec B$, то существует «наикратчайшая цепочка» (наименьшее число) неразличимых точек, связывающих точку $A$ и точку $B$;

(Ш11) То же самое для «$\succ$»;

$$(\text{Ш}12)\ (A \sim C \& C \sim B \supset \neg \exists D (A \prec D \& D \prec B));$$

$$(\text{Ш}13)\ (A \sim C \& C \sim B \supset \neg \exists D (A \succ D \& D \succ B)).$$

По словам Прайора, «... система, кажется, очень точным образом формализует некоторые градации переходов, данные в чувственном опыте, и может быть сравнима с более неформальными построениями Вайсмана» [59].

Из аксиом Шираиши выводятся теоремы (нам неизвестно, какие теоремы выводил сам Шираиши). Сформулируем, например, теоремы $T1$—$T3$.

Знак «$\rightarrow$» означает «следует». Ввиду тривиальности выводов этих теорем сделать эти выводы предоставляем читателю.

$$(\text{Ш}1) \rightarrow (T1)\ (\neg (A \sim B) \equiv (A \prec B \vee A \succ B));$$

$$(\text{Ш}7),\ (T1) \rightarrow (T2)\ (\exists A \exists B \exists C (A \sim B \& B \sim C \& (A \prec B \vee A \succ B)));$$

$$(\text{Ш}1),\ (T1) \rightarrow (T3)\ (A \sim B \vee \neg (A \sim B)).$$

Теорема $T3$ говорит о том, что любые две точки либо различимы, либо неразличимы.

Интерпретируем теперь термины «различимость» и «неразличимость» как различимость и неразличимость в сфере «психологического опыта и физического мира», для описания непрерывности которого и построил свою систему Шираиши. Пусть точками будут некоторые физические объекты. Для конкретности возьмем область зрительных ощущений. Линия, напечатанная типографским способом, нам кажется непрерывной, так как на уровне нормального расстояния от глаз до газеты мы не различаем двух соседних точек $A$ и $B$. Значит, на данном уровне точки $A$ и $B$ неразличимы, что можно записать выражением $(A \sim B)$. Придвинем газету к глазам, и мы различим эти точки, линия уже не будет казаться непрерывной. Стало быть, мы можем сказать, что точки $A$ и $B$ различимы, что в свою очередь можно записать как $\neg(A \sim B)$ (аксиомы сами по себе ничего не говорят ни о каких уровнях различимости!). Итак, мы получаем $(A \sim B)\& \&\neg(A \sim B)$, что, конечно, противоречит $(T3)$. С. А. Яновская в упомянутой работе предпочла избавиться от этого противоречия путем введения требования различать уровни неразличимости.

Но так как для каждого случая невозможно предусмотреть, сколько будет таких уровней, то теория должна предусмотреть потенциально бесконечное количество этих уровней. Этот факт и означает введение абстракции потенциальной бесконечности. Для каждого уровня будут свои аксиомы, но чтобы такую систему можно было записать, надо ввести индексы при знаках «$\sim$», «$\prec$», «$\succ$», а аксиомы Шираиши рассматривать как схемы аксиом. Например, «$A \underset{n}{\sim} B$» будет читаться «точки $A$ и $B$ неразличимы на $n$-м уровне, а аксиома (Ш1) станет схемой аксиом $(A \underset{n}{\sim} B \dot{\vee} A \underset{n}{\prec} B \dot{\vee} A \underset{n}{\succ} B)$. Подобным образом переделываются все другие аксиомы.

Но на этом трудности, связанные с аксиомами Шириаши, не кончаются. Здесь возникает трудность, подобная той, о которой мы говорили при описании непрерывности пространства, времени и движения на основе использования понятия канторовской непрерывности.

Действительно, схема аксиом

$$(\text{Ш7})\quad (\exists A \exists B \exists C\, (A \underset{n}{\sim} B \,\&\, B \underset{n}{\sim} C \,\&\, \neg (A \underset{n}{\sim} C)))$$

говорит о существовании таких трех точек $A$, $B$ и $C$, что точки $A$ и $B$, $B$ и $C$ неразличимы, а точки $A$ и $C$ различимы. Вообще говоря, неразличимость имеет только тот смысл, который определен аксиомами. Но аксиомы важны не сами по себе, а для некоторого применения, в частности для описания фактов «психологического опыта и физического мира», о чем говорит Шираиши. Тогда встает вопрос, как можно говорить, что мы точку $B$ не различаем от точки $C$, а точку $A$ различаем от точки $C$, если точки $A$ и $B$ ни в каком смысле неразличимы? Откуда бы мы тогда знали о существовании точки $B$? Кроме того, точка $A$ и точка $B$ имеют разное отношение к точке $C$: точка $B$ неразличима с точкой $C$, а точка $A$ различима с точкой $C$. Стало быть, в каком-то смысле точки $A$ и $B$ различимы на том же самом $n$-м уровне. Этот смысл различимости нельзя не учитывать, если перед нами стоит задача полного описания понятия неразличимости. Но его нельзя выразить в данной системе без противоречия.

Шираиши предвидит, что выражение $\exists A \exists B \exists C$ ($B \sim C \& A \prec C$) или выражение $\exists A \exists B \exists C$ ($B \sim C \& A \succ C$), выводимые из ($T2$), сами по себе различают $A$ и $B$ (хотя формально нельзя вывести, что $A \prec B$ либо $A \succ B$, так как это совсем другой смысл различимости, не описываемый аксиомами).

Таким образом, $A \prec C$ и $A \sim B$ и $B \sim C$ будут казаться невозможной комбинацией. Поэтому Шираиши предлагает различать различные значения «различимого». Но Шираиши оставляет без ответа вопрос, почему же эта комбинация, являющаяся выражением

$$\exists A \exists B \exists C (A \prec C \& A \sim B \& B \sim C),$$

кажется противоречивой — ведь нетрудно показать, что если бы из этого выражения выводилось противоречие, то и вся система аксиом была бы противоречивой, чего на самом деле нет.

Дело в том, что формальная система неполно, приближенно описывает значения неразличимости и различимости, поэтому при интерпретации мы выявляем новые их значения, которые не описаны аксиомами, но которые непосредственно «бросаются в глаза» и кажутся также необходимыми. Описание этих последних свойств не принадлежит исходной формальной системе, поэтому говорить о логическом противоречии не имеет смысла, ибо само понятие логического противоречия формулируется только для некоторой данной системы.

Однако то, что мы и различаем точку $A$ от точки $B$, и не различаем точку $A$ от точки $B$ в одно и то же время, хотя и в разных смыслах, является трудностью при описании неразличимости, преодоление которой является гносеологической проблемой. Концепция Шираиши, вообще говоря, может быть использована для описания непрерывности движения. Для этого она должна использовать абстракцию потенциальной бесконечности (для различения уровней неразличимости). Концепция Шираиши предполагает разрешенными все трудности, связанные с абстракцией потенциальной бесконечности. Значит, ей нельзя придавать абсолютного характера, ибо она также принимает какие-то трудности решенными, не разрешая их на самом деле, как и любое другое математическое описание движения.

Сторонники чувственно данного континуума критикуют концепцию канторовского континуума с двух сторон.

1) Потому, что эта концепция основана на абстракции актуальной бесконечности, которая самопротиворечива, так как, по их мнению, предполагает законченной никогда не заканчиваемую серию актов.

2) Потому, что математическое описание процесса движения, основанное на концепции канторовской непрерывности, противоречит самому процессу движения. Это противоречие составляет действительную трудность.

Отвергая канторовский континуум, они разрабатывают концепцию «чувственно данной непрерывности». Сторонники канторовского континуума, напротив, доказывают несостоятельность критики концепции канторовской непрерывности и абстракции актуальной бесконечности как по пункту 1), так и по пункту 2).

**Теория непрерывности движения А. Грюнбаума.** Сторонники канторовского континуума обосновывают приемлемость абстракции актуальной бесконечности для описания непрерывности движения.

Точка зрения Рассела по этому вопросу была нами уже изложена. Интерес представляют в этом отношении также работы Тейлора [49] и особенно Грюнбаума [50].

Тейлор и Грюнбаум продолжают линию Рассела, принимая абстракцию «абсолютной» осуществимости и утверждая, что если объект можно мыслить без противоречий, то нельзя доказать, что он не таков в реальной действительности. Если описание движения с помощью абстракции актуальной бесконечности непротиворечиво, то, говорят они, нельзя доказать, что движение не таково на самом деле. На этом основании они предлагают признать данное описание адекватно соответствующим реальному движению.

Блэк [48] отвергает математические описания непрерывности, использующее абстракции актуальной и потенциальной бесконечности, как самопротиворечивые и предлагает рассматривать пространство и время с чисто физической точки зрения.

Согласно этой точке зрения, по мнению Блэка, описание пространства и времени требует расчленения их лишь на конечное число актов, ибо такова структура физического пространства и времени. Тейлор тогда ставит Блэку вопрос: является ли сам подобный акт временным процессом или нет? Если нет, то начало и конец акта совпадают, т. е. он совершается мгновенно, что противоречит концепции Блэка. Если да, то он состоит из актов, и вопрос снова повторяется, и так до бесконечности, что противоречит конечной структуре пространства и времени, принимаемой Блэком. Значит концепция конечного расчленения пространства и времени сталкивается с не меньшими трудностями, чем концепция, основанная на бесконечности. Поэтому Тейлор предлагает принять концепцию «дискретной бесконечности как совокупности, которая не имеет первого и последнего членов и не подвержена воображаемым трудностям самопротиворечивости» ([49], стр. 38).

Он говорит, что нельзя думать, будто процесс, не имеющий последнего акта и в этом смысле бесконечный, может продолжаться «всегда». Например, процессы, продолжающиеся $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ минуты или $\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2}$, 1 минуту, как кончаются, так и начинаются, хотя один из них не имеет последнего акта, а второй — первого.

По мнению Тейлора, то, что эти процессы не имеют последнего (или первого) акта, совместимо с тем, что они заканчиваются или начинаются, если конец и начало мыслить как пределы этих последовательностей.

Если путь (или время) движения представляет ряд $1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$, то процесс движения не имеет последнего акта, так как данный ряд не имеет последнего члена. Но этот ряд —

сходящийся, он имеет предел. Поэтому завершение данного процесса движения надо понимать не как наличие последнего члена ряда, а как наличие предела этой последовательности. Короче говоря, предложение «бесконечный процесс закончен» равнозначно предложению «бесконечный сходящийся ряд имеет предел».

Грюнбаум критикует такое решение вопроса ([50], стр. 147) по той причине, что оно опирается на арифметическое определение суммы сходящейся бесконечной последовательности. Но что заставляет нас, спрашивает Грюнбаум, принять именно это определение, а не иное? Непротиворечивость этого определения еще ничего не говорит в его пользу. Другая арифметическая теория может принять противоположное—и также непротиворечивое—определение суммы бесконечного сходящегося ряда. Даже в случае сходящегося ряда эту сумму можно определить как бесконечную. С точки зрения последнего определения бесконечный ряд нельзя мыслить завершенным. Какая же из этих теорий физически оправдана и может ли частная арифметическая теория быть физической теорией?

«Рассел и Тейлор придерживаются предельного определения суммы бесконечного ряда конечных кардинальных чисел и принимают ее как гарантию того, что частная арифметическая теория, разрабатывающая это определение, является физической теорией» ([50], стр. 178).

На вопрос, сколько будет длиться физический временной ряд, где первым актом будет одна минута, вторым актом — полминуты и т. д. ($1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ минуты), Тейлор отвечает: ряд будет длиться не «всегда», а ровно «две минуты», ибо его предел равен 2. Грюнбаум против того, чтобы этот ответ считать ответом на физический вопрос. С точки зрения арифметической теории предел суммы данного ряда действительно равен 2, если определить эту сумму надлежащим образом. Но с точки зрения физической теории противоречиво мыслить такой ряд законченным. Поэтому неправомерно отождествлять арифметическое и физическое решение вопроса. Но неверно, однако, эти решения считать абсолютно не соответствующими друг другу. Поэтому Грюнбаум критикует и Блэка за отрицание того, что рассмотрение бесконечности в математической теории движения не имеет отношения к физическому миру и к описанию движения, критикует за утверждение полного финитизма в описании действительного процесса движения. По поводу полемики Блэка, Тейлора и Грюнбаума можно сказать следующее.

Во-первых, нет оснований физической реальности приписывать такой же точно характер, какой ей приписывает Блэк, и по этой причине отрицать применимость описания движения, пространства и времени, использующее бесконечность. Во-вторых, описание непрерывности, предлагаемое направлением Блэка, Уиздома, Вайсмана, Ширайши, основы которого имеются также и у Рассела, включает аксиомы, подобные ($R2$) или (Ш7). Но с этими аксиомами связаны трудности такого же характера, что и трудности описания непрерывности, основанной на понятии бесконечности. Неверно с физической точки зрения и решение Тейлора, ибо неясно, как движущаяся по бесконечному ряду точка может достичь своего предела, если расстояние между ней и пределом никогда не будет равно нулю.

Несмотря на оригинальность логико-математического решения, гносеологическое решение обсуждаемого вопроса, предложенное Грюнбаумом, также не может считаться удовлетворительным. Грюнбаум доказывает, что его решение, исходящее из принятия линейного канторовского континуума точечных событий, полностью согласуется с физической теорией, а именно с теорией относительности, а отсюда — и с реальной действительностью. Но последняя теория, как известно, сама рассматривает пространство — время, исходя из теории точечных множеств. Так что по существу Грюнбаум не выходит за пределы математического рассмотрения движения с точки зрения теории точечных множеств, которая сама содержит все трудности актуальной бесконечности.

В теории относительности под событием понимается «„точечное" явление, вроде мгновенной вспышки точечной лампы, т. е. явление, протяжением которого в пространстве и во времени можно пренебречь. Все явления можно рассматривать состоящими из событий, и с этой точки зрения мир во всем его протяжении в пространстве и во времени представляется как множество или многообразие событий» ([60], стр. 117).

Грюнбаум считает эту концепцию достаточной для разрешения всех парадоксов движения — при условии, что мощность множества событий равна $\aleph$, а не $\aleph_0$. Мы кратко остановимся на этой концепции Грюнбаума.

Во-первых, Грюнбаум считает, что описание движения можно дать непротиворечивым образом путем расчленения пространства и времени на бесконечное множество точек и моментов, не имеющих измерений. Во-вторых, он утверждает, что можно непротиворечиво мыслить пространство и время состоящими из сверхсчетной бесконечности непротяженных точек и моментов, можно считать, что такая теория адекватно описывает пространство, время и движение. Грюнбаум считает несостоятельной концепцию Рассела на том основании, что Рассел допускал рассмотрение пространства и времени как счетных совокупностей непротяженных элементов (точек).

Возникает вопрос, каким образом пространственный или временной интервал расчленить на бесконечное множество точек или моментов? Только при помощи постулирования актуальной бесконечности точек или моментов в этом интервале. Процесс потенциально бесконечного деления не может привести к актуальному множеству точек, ибо иначе мы получим противоречие.

«Мы никогда не „достигнем" посредством „бесконечного деления" актуальной бесконечности математических точек, и, следовательно, не существует вовсе вопроса порождения актуальной бесконечности непротяженных элементов посредством „бесконечного деления"» ([32], стр. 299).

Потенциальная бесконечная делимость линейного интервала независима от актуальной бесконечности составляющих его точек, и наоборот. Интервал одновременно и бесконечно делим и бесконечно разделен, причем одно не зависит от другого.

«Наш анализ, — говорит Грюнбаум, — показывает, как мы можем утверждать следующие два предложения совершенно непротиворечиво:

1) линия и интервалы на ней являются бесконечно делимыми;

2) линия и интервалы на ней являются объединением неделимых вырожденных интервалов» ([32], стр. 302).

Под вырожденным интервалом понимается интервал, состоящий из одной точки. Но тогда интервал можно непротиворечиво мыслить как объединение континуума точек (вырожденных интервалов), являющихся неделимыми, ибо они не возникают путем завершения процесса бесконечного деления. Причем это «объяснение» нельзя мыслить как последовательное прибавление нулей, т. е. длин вырожденных интервалов. Здесь возможно теоретико-множественное сложение, но не арифметическое. На этом основании Грюнбаум считает непротиворечивым рассмотрение пространства и времени, с одной стороны, как бесконечно делимых, а с другой стороны, как состоящих из бесконечного множества неделимых, имеющего мощность $\aleph$.

Парадоксы движения Зенона с точки зрения этой концепции разрешаются следующим образом.

Так как эти парадоксы, по словам Грюнбаума, касаются физического движения, физических пространств и времени, то нельзя их решать на чисто математической основе, как это делает Рассел. Надо в их решении опираться на факты физического мира, а не на то или иное математическое определение вроде определения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Арифметика ответа на физический вопрос не дает и парадоксов не решает. Но откуда можно получить сведения о таких действительных фактах физического мира, как пространство, время и движение? Как мы видели, Блэк и другие сторонники «данного в опыте континуума» говорят, что такие сведения должны дать ощущения: что нам о непрерывности говорят ощущения, то надо и положить в основу теории непрерывности движения. Грюнбаум называет это решение решением с точки зрения психологического критерия.

Но правомерен ли этот критерий? Грюнбаум считает, что этот критерий основан на интуиции и не может быть достоверным. Интуиция говорит нам, что время так же дискретно, как дискретны воспринимаемые нами процессы, у которых каждый акт имеет непосредственно следующий акт, например, как процесс ударов сердца и т. д. Но почему время должно быть устроено по образцу чувственно воспринимаемых нами процессов? — ведь чувства дают нам не точные представления о реальности. Надо опираться не на психологический критерий, по словам Грюнбаума, а на точный физический критерий. Под этим критерием он понимает те представления о пространстве, времени и движении, которые дают нам современные физические теории: теория относительности, квантовая механика, термодинамика. С помощью современных физических теорий процесс движения можно описать так, что все эти свойства движения будут выполняться.

С точки зрения теории относительности движение частицы, проходящей конечную дистанцию, геометрически будет представляться мировой линией, состоящей из множества мировых точек (событий).

Так как события, с помощью которых описывается движение частицы, имеют между собой причинную связь, то наша линия будет «временноподобной» линией. Множество событий имеет мощность континуума и поэтому непрерывно в смысле Кантора. Для краткости будем говорить, что множество событий континуально, чтобы не путать его с множеством событий в теории Рассела, которое не имело мощности континуума и поэтому обладало иным родом непрерывности.

Допустим, что частица прошла дистанцию с координатами начала и конца движения, соответственно обозначаемыми через 0 и 1. Тогда мы имеем актуальное бесконечное (континуальное) множество событий, которые можно привести во взаимно однозначное соответствие с множеством точек отрезка [0,1]. Остается придать физический смысл отношению «позже, чем», которое упорядочивает это множество.

Естественно, что чувственные данные здесь тоже не могут помочь, ибо они связаны с дискретностью временно́го порядка, в котором каждое событие имеет непосредственно следующее, а рассматриваемое множество событий обладает несовместимым с такой дискретностью свойством плотности, т. е. ни одно из событий не имеет непосредственно следующего события.

Грюнбаум считает, что события можно упорядочить с помощью термодинамического понятия энтропии. Из двух энтропических состояний замкнутой системы событий состояние с высшей энтропией называется более поздним состоянием. Однако, такое понимание временно́го порядка пригодно лишь для замкнутых систем. На самом деле в большинстве случаев мы имеем дело с открытыми системами. Так как значениями энтропии могут быть все действительные числа, то такое упорядочение может характеризовать множество событий, имеющее мощность $\aleph$.

Если движение произошло, то тем самым произведено, по мнению Грюнбаума, континуальное множество физических событий, и нет смысла спрашивать, как оно могло произойти и каким образом частица начала и окончила движение. Можно лишь констатировать факт, что движение началось и завершилось и что имеются начальная и конечная точки движения частицы. После этого полученный континуум событий можно подразделять на интервалы каким угодно образом.

«Если континуум событий может произойти ,... то эти самые события могут произойти безотносительно к тому, как мы разделим множество событий на подмножества (или подинтервалы). Мы можем разделить метризованный континуум событий разными способами так, что получим либо конечное, либо счетное множество непересекающихся подинтервалов. Последняя возможность реализуется в убывающей последовательности $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \frac{a}{2^3}, \ldots$, рассматриваемой в апории «Дихотомия» ...» ([61], стр. 178).

Можно, например, разделить отрезок $[0,1]$ событий, полученный при движении частицы за 1 секунду и состоящий из континуума событий, на конечное число $10^{23}$ полуинтервалов. Каждый полуинтервал будет соответствовать кванту времени $10^{-23}$ секунды. Отсюда видно, что атомизм физических процессов, о которых говорит нам квантовая механика, хорошо согласуется с континуальностью множества событий.

Можно отрезок $[0,1]$ делить на полуинтервалы

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \ldots .$$

Если все множество событий произошло, то подразделять его можно как угодно, и, таким образом, бесконечный процесс деления согласуется с завершенностью множества без каких-либо противоречий, ибо завершенность не связана с наличием у бесконечного процесса последнего члена. «Отсутствие такого последнего подинтервала не препятствует, как это часто думают, завершению последнего события в ряду событий» ([61], стр. 179).

С такой точки зрения апории «Дихотомия» и «Ахиллес» решаются довольно просто. Движение частицы в апории «Дихотомия» или движение Ахиллеса — это континуальные множества событий, подразделяемые с помощью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $1/n$ ($n \geqslant 2$). Апории разрешаются без всякого использования теории пределов. Апория «Ахиллес» разрешается тем, что два континуума событий имеют общее событие, а тот факт, что они подразделены на подинтервалы в порядке геометрической прогрессии, на факт обладания обоими множествами общим событием влиять не может. Апория «Стрела» решается тем, что «множество событий может составлять линейное движение, если оно есть континуальное множество с отношением упорядочения «правее» или «левее» и с отношением «позже, чем». Следовательно, физическое движение есть «сумма неподвижных», хотя Бергсон прав, что это не так для чувственно воспринимаемого движения» ([61], стр. 184).

Спрашивать, как произошли эти множества событий, нечего — они произошли, и все тут! Бессмысленно говорить о движении относительно самого события, а не интервала событий. Поэтому можно говорить о первом событии в процессе движения, но не о первом (или последнем) движении, ибо нет ни первого (или последнего), ни временного, ни пространственного интервала.

Так как индивидуальные события не обладают свойством движения, то Грюнбаум солидарен с высказыванием Расселa о том, что «мы живем в неизменном мире и что стрела в каждый момент своего полета действительно покоится» ([61], стр. 179).

Хотя Грюнбаум критикует Рассела за чисто математический подход к решению проблемы парадоксов движения, но по существу его решение мало чем отличается от расселовского, и именно потому, что в основе его теории лежит та же теория точечных множеств, которой пользовался и Рассел. Грюнбаум говорит не о положении частицы в какой-то момент в какой-то точке, а о событии, характеризуемом единым пространством — временем.

Но дело в том, что в рассматриваемых в апориях ситуациях трудности возникают не из факта расчленения пространства — времени на пространство и время, а из факта расчленения самого пространства (или самого времени). Если Рассел принимал как аксиому предложение о том, что движение частицы на отрезке [0, 1] закончено, так как переменная $x$ принимает значения всех действительных чисел от 0 до 1, то Грюнбаум принимает аксиоматически предложение о том, что континуум событий каким-то образом происходит. Существенной разницы для решения рассматриваемого вопроса в этом нет. Поэтому проведенная нами критика концепции Рассела по существу относится и к концепции Грюнбаума.

Остается опять-таки нерешенным вопрос, как может происходить движение частицы на какой-либо конечной дистанции в конечное время, если анализ этого пути и времени приводит к элементам, относительно которых не имеет смысла говорить о движении.

Зенон всю трудность видел как раз в ответе на этот вопрос. Грюнбаум, в отличие от Рассела, отрицает возможность разрешения апорий без использования понятия непрерывности по Кантору. Но это действительно имеет место лишь по отношению к парадоксу меры, который Рассел не рассматривал. Нетрудно видеть, что остальные парадоксы не зависят от того, о каком множестве точек, или моментов, или событий идет речь — о плотном, но не непрерывном, по Кантору, или о непрерывном, по Кантору. По словам самого Грюнбаума, «противоречия», сформулированные Зеноном, возникают между математическим описанием и физической реальностью. Физическая реальность, по мнению Грюнбаума, выражается теорией относительности. Между математической и физической теориями имеется согласованность. Но это не означает на самом деле ликвидацию определенного «противоречия» между реальным движением и физической теорией, его отображающей, ибо сама теория относительности идеализирует, огрубляет действительность, пользуясь той же самой математической теорией.

Нельзя думать, что существуют события без длительности и протяжения. Существуют события, размерами которых можно пренебречь в данном рассмотрении. Поэтому теория Грюнбаума не разрешает главной гносеологической трудности, заключенной в апориях Зенона.

Грюнбаум не считает правомерным математическое решение парадоксов, но решает, например, парадокс меры с точки зрения теории меры точечных множеств, только точка у него интерпретируется как событие.

Таким образом, он решает парадокс с помощью математической теории. Кроме того, сама теория меры пользуется понятием предельного перехода, т. е. тем, от чего Грюнбаум считает свободным свой метод разрешения парадокса. В парадоксе меры, если приписывать непосредственный физический смысл точкам, моментам или событиям, речь идет о непротяженных сущностях, о том, что можно назвать «ничто», и из этого «ничто» никоим образом не построить никакого физического тела даже при условии, что они будут составлять континуальное множество. Парадокса меры таким путем не разрешить, если иметь в виду приписывание непосредственно физического смысла всем понятиям теории меры. Теория меры применима для решения научно-практических задач вовсе не потому, что точкам можно приписывать непосредственно физический смысл.

Некоторые авторы, например С. А. Богомолов [62], считают, что неподвижность точки тела в каждой точке пространства все же приводит к возникновению движения точки тела, если мощность множества точек отрезка пространства несчетна (континуальна). С.А. Богомолов, рассматривая пространство и время как некоторые континуумы, разрешает, например, парадокс «Стрела» следующим образом.

«„Стрела" вскрывает диалектические противоречия, заложенные в сущности движения: вполне определенные положения в отдельные моменты, взятые в актуально бесконечном числе (мощности континуума) и связанные известными отношениями различия и последовательности, дают в целом новое качество (то самое „состояние движения", о котором так много говорилось и за и против» ([62], стр. 48).

Спрашивается, если в точке движение не существует, то на каких физических основаниях оно появится во множестве этих точек, пусть даже континуальном? То, что Грюнбаум аксиоматически принимает движение тела законченным, ибо оно составляет континуум событий, не решает трудности, которая в том и состоит, что непонятно, как это может происходить в физическом мире.

Полностью разрешить трудности, возникающие при отображении движения, как Грюнбауму, так и другим упомянутым нами авторам фактически не удалось. В лучшем случае эти решения являются решением логико-математического аспекта при условии принятия гносеологического аспекта за решенный.

**Некоторые выводы.** 1. Неправомерна уже сама по себе постановка вопроса в том виде, как его ставят Грюнбаум, Шираиши и др. Они считают, что теория может только тогда претендовать на возможность отобразить движение, когда действительность устроена точно таким образом, как об этом говорит теория. Поэтому Грюнбаум истинность своей концепции видит в том, что теория относительности все явления рассматривает как континуумы точечных событий. Грюнбаум упускает из виду, что сама теория относительности лишь огрубленно и приближенно, с определенной степенью идеализации отражает действительность.

Шираиши и другие сторонники точки зрения «чувственно данной непрерывности» считают, что мир устроен в точности так, как об этом говорят их теории, поэтому именно их теории истинны, а теории Грюнбаума и других сторонников «канторовского континуума» ложны.

На деле соотношение между теорией, отображающей движение, и реальным движением гораздо сложнее, чем это представляют себе Грюнбаум, Шираиши, Вайсман и др. Противопоставление одной теории другой как абсолютной истины абсолютному заблуждению носит явно метафизический характер. Конечно, не любую теорию можно считать истинной даже в определенных рамках. Вопрос решает критерий практики. Приведенное нами заявление Рассела, что действительность не может ни подтвердить, ни опровергнуть ни одну из упомянутых теорий, лишено оснований, ибо в относительном смысле такое подтверждение всегда бывает.

Практика, в широком ее понимании, подтверждает, что в определенной мере для решения определенных научно-практических задач «канторовский континуум» вполне пригоден. Практика подтверждает также, что очевидность до некоторой степени оправдывает то понимание непрерывности, которое описано, например, аксиоматикой Шираиши. Но практика опровергает, что какая-либо из этих теорий отражает действительность абсолютно точно, вне зависимости от всяких условий.

Напротив, рассмотренные нами теории односторонне, неполно, огрубленно описывают реальное движение.

Неполнота одной из них, в частности теории Шираиши, была нами подробно рассмотрена. Эта теория не отражает даже того смысла непрерывности, который, казалось бы, должна отражать, что обнаружил уже сам Шираиши.

2. Неправомерно также какую-либо формальную теорию рассматривать как теорию, полностью отображающую специфику движения даже с точки зрения отображения его со стороны таких общих свойств, как свойства пространственно-временного изменения и непрерывности. Арифметические интерпретации систем Шираиши и Грюнбаума свидетельствуют, что данные теории отражают лишь то, что есть общего у реального движения со многими другими объектами, например такими объектами, как действительные числа.

3. Нельзя считать, что не только какая-то одна формальная теория (например, Грюнбаума или Ширайши), но даже несколько таких теорий могут полностью описать свойства движения.

Всегда будет иметься неформализованное знание о движении. Более того, полнота знания о неформальном объекте вообще, а тем более о таком объекте, как движение, не может не складываться не только из точных описаний этого объекта, но и из чувственно данных нам представлений, на основе которых мы непосредственно судим о некоторых свойствах движения.

Кроме рассмотренных нами способов анализа и разрешения трудностей отображения движения в современной зарубежной литературе имеются и другие способы. Для примера можно назвать статьи Бернарда Пича [63], Хинтона и Мартина [64], Милича Чапека [65], Алана Уайта [66], Станислава Куана [67], Джона Нелсона [68] и др.

Нам представляется весьма интересным способ разрешения некоторых апорий движения на основе введения элемента приблизительности в само понимание абстракций, с помощью которых описывается движение. Например, на основе рассмотренного нами понятия непрерывности по Ширайши удается разрешить математический аспект некоторых апорий Зенона за счет того, что достижение движущейся точкой конечной точки пути не представляется абсолютно точным, а понимается с некоторой степенью неопределенности, и достаточно движущейся точке быть «неразличимой» с конечной точкой, чтобы этот факт считать прохождением точкой всей дистанции. Мысль о том, что апории Зенона можно разрешать, допуская неопределенность, нежесткость момента достижения движущейся точкой конечной точки пути, можно также найти у Хинтона и Мартина [64] и у Вейтлинга [73].

Мартин и Хинтон считают, что если момент «достижения» не жесткий, то достаточно движущейся точке попасть в район конечной точки пути, чтобы последняя считалась достигнутой. Вейтлинг эту же идею выражает с помощью понятия предельного перехода. Если, например, Ахиллес сколь угодно близко приближается к черепахе и разница в расстоянии между ними в пределе равна нулю, то ее можно принять просто равной нулю, и этот факт интерпретировать как «достижение» Ахиллесом черепахи. Утверждение об отсутствии «жестких» точек и моментов, которое дает возможность разрешать некоторые апории Зенона, не лишено физических оснований. Так, современная физика устанавливает, что как микрочастицы, так и микротела не имеют строгой пространственно-временной локализации. Но если в области микромира этим фактом пренебречь нельзя, то в области макромира — можно ([79] гл. V). Поэтому математическое описание движения, предполагая точки и моменты объектами, которые можно всегда отождествлять или различать объектами «жесткими», строго отграниченными друг от друга, допускает огрубление и упрощение действительности. Оно отвлекается от «нежесткости» пространственно-временных свойств объектов. Такое отвлечение справедливо до тех пор, пока эта «нежесткость» является несущественной, но оно должно приводить к трудностям, когда данное свойство становится существенным. В свою очередь понятие «нежесткости» также является описанием, упрощающим реальное состояние вещей.

Представляют интерес для разрешения апории Зенона «Ахиллес» соображения, высказанные в статье Станислава Куана [67]. Причину парадокса он видит в том, что первоначальные условия, позволяющие Ахиллесу догнать черепаху, впоследствии изменяются, и начинают неявно выдвигаться условия, уже не позволяющие ему сделать этого.

С. Куан показывает, что в парадоксе «Ахиллес» в предложении «Ахиллес движется быстрее черепахи» с термином «быстрее» можно связывать три различных смысла:

1) когда тело, движущееся «быстрее», покрывает дистанцию в меньшее количество времени, чем «более медленное» тело;

2) когда тело, движущееся «быстрее», покрывает большую дистанцию, чем «более медленное» тело, но в меньшее количество времени;

3) когда тело, движущееся быстрее, покрывает бо́льшую дистанцию, чем дистанция, проходимая «более медленным» телом, за то же самое время.

Если в первый момент движения Ахиллеса и черепахи их движения независимы и Ахиллес является более быстрым в третьем смысле, то во второй момент порядок движения Ахиллеса зависит от порядка движения черепахи и Ахиллес становится более быстрым уже в первом смысле. Фактически движение Ахиллеса и черепахи оказывается разделенным на ряд стартов и финишей, причем на каждом старте вводится новое множество условий движения.

В самом деле, в начале рейса движения черепахи и Ахиллеса связаны только одним условием: Ахиллес должен двигаться быстрее черепахи. Это условие соблюдается в период времени $[t_1t_2]$ начиная с момента старта Ахиллеса и черепахи $t_1$ вплоть до момента $t_2$, в который Ахиллес, отправляясь из места $S_1$, достигнет места старта черепахи $S_2$. За этот промежуток времени черепаха продвинется вперед и достигнет места $S_3$. С этого момента к первому условию прибавляется новое условие, первоначально не фигурировавшее. Оно заключается в том, что дистанция $[S_2S_3]$ определяет время движения Ахиллеса от места $S_2$ к месту $S_3$. Значит, прошлое движение черепахи определяет параметры будущего движения Ахиллеса.

Исходя из первоначальных условий, делается вывод о возможности Ахиллеса догнать черепаху, а затем, когда условия неявно изменены, делается вывод о невозможности этого. Получается противоречие за счет подмены условий движения. Если строго соблюдать первоначальное условие, то никакого противоречия не возникнет и будет правомерен однозначный ответ: Ахиллес догонит и перегонит черепаху. Так разрешает эту трудность С. Куан. Нам кажется, что Куан действительно проливает свет на то скрытое изменение условий движения Ахиллеса и черепахи, которое содержится в самой формулировке апории Зенона и которое предопределяет появление противоречий.

Аристотель интуитивно чувствовал, что формулировка апории содержит нечто такое, что мешает Ахиллесу догнать черепаху, и что если это нечто устранить, то тем самым можно «позволить» Ахиллесу догнать черепаху. Куан показал, что устранением этого «нечто» является устранение подмены одного условия движения другим условием.

Несколько иной подход к разрешению этого же парадокса предлагает Джон Нелсон [68]. Нелсон считает, что в формулировке парадокса «Ахиллес» применяются два описания движения, одно из которых он обозначает буквами $CR$, а другое — буквами $PM$. В описании $CR$ движение тела рассматривается как прохождение телом в равные промежутки времени равных расстояний. Очевидно, что применение $CR$ к описанию движения Ахиллеса и черепахи делает возможным дать положительный ответ на вопрос, догонит ли Ахиллес черепаху, ибо за одни и те же промежутки времени Ахиллес проходит бо́льшие расстояния, чем черепаха.

Описание *PM* представляет движение как Ахиллеса, так и черепахи в виде двух процессов прохождения отрезков, величины которых представляют бесконечные геометрические убывающие прогрессии. Как мы знаем, согласно этому описанию Ахиллес никогда не сможет догнать черепаху. Очевидно, что применение обоих описаний *CR* и *PM* к описанию одного и того же процесса движения приведет к логическому противоречию. Чтобы разрешить это противоречие, надо отказаться от возможности одновременного применения описаний *CR* и *PM*.

Однако в этом Нелсон не видит удовлетворительного выхода из положения. По его мнению, оба эти описания содержатся в значении термина «движение». Поэтому любой процесс движения является процессом, совершающимся так, как об этом говорит не только описание *CR*, но и описание *PM*. Эту трудность Нелсон разрешает не весьма ясным образом. Он говорит об ошибочности общей теории значения, которая утверждает, что «значения содержатся в слове, как постулаты в дедуктивной системе». Поэтому Нелсон отвергает общую теорию значения, считая, что описания *CR* и *PM* не содержатся в значении слова «движение», как постулаты содержатся в дедуктивной системе.

Такое, чисто отрицательное, решение упомянутой трудности не дает ответа на вопрос, содержатся ли каким-либо другим образом описания *CR* и *PM* в значении слова «движение». Если содержатся, то как? На наш взгляд, чисто отрицательное разрешение Нелсоном указанной трудности не случайно, ибо положительное ее решение требует диалектико-материалистической методологии. Дело в том, что огрубления и упрощения, неизбежные при отображении движения, могут быть, как это и есть в данном случае, такими, что одно из них необходимо абстрагируется от таких сторон движения, от которых не абстрагируется другое. Оба описания могут быть применимы для отображения движения. Они образуют синтетическое знание о движении, но не составляют одной теории и только поэтому не вызывают логических противоречий. Подробнее этот вопрос будет изложен в следующем параграфе.

До сих пор речь шла главным образом о методах разрешения трудностей отображения движения типа апорий «Дихотомия» и «Ахиллес». Поэтому не будет излишним кратко остановиться на некоторых методах разрешения трудностей типа апории «Стрела». Подобные методы рассматриваются, например, Казимиром Айдукевичем [80]. Айдукевич, в частности, приводит в своей статье метод Райнаха (Reinach); Райнах пытается разрешить трудность, которая, согласно Зенону, заключается в том, что движущееся тело в каждое мгновение находится в некоторой точке пространства, поэтому оно в каждое мгновение покоится, из чего следует, что движущееся тело покоится.

Рейнах предлагает понимать мгновения времени и точки пространства как математические точки. Термин «находится» он считает общим понятием по отношению к терминам «оставляет», «достигает», «проходит» и «пребывает», которые не определяются и предполагаются интуитивно ясными. При таком понимании термина «находится», из того, что тело в каждое мгновение «находится» в некоторой точке пространства, вовсе не следует, что оно там непременно покоится или пребывает в этой точке. Оно может «оставлять» эту точку, «достигать» ее, «проходить» или «пребывать» в ней. Общий термин «находится» нельзя отождествлять с его частным значением «пребывает», однако последний можно понимать в значении «покоится». Это, по словам Райнаха, полностью разрешает апорию «Ахиллес». Нам кажется, что на самом деле трудности не разрешаются, а отодвигаются вглубь, а именно в понимание значений терминов «оставляет», «достигает», «проходит» и «пребывает».

Айдукевич, полемизируя с Райнахом, считает, что нельзя отвлекаться от прошлого и будущего состояний движущейся точки тела, чтобы отличить движение от покоя, ибо относительно самого по себе момента времени, взятого изолированно, эти состояния не различимы. Посмотрим, как Айдукевич претворяет в жизнь требование определять движение и покой точки тела в некоторый момент времени. Терминам «точка пространства», «момент времени», «находится» он придает тот же самый смысл, какой им придавал Райнах. Движение он определяет следующим образом:

(Д1) Предмет $c$ д в и ж е т с я в момент $t$, если и только если существует временной интервал $(t_1t_2)$, такой, что $t_1 < t < t_2$, который обладает тем свойством, что в каждые два различных момента $t_i$, $t_l$, принадлежащих интервалу $(t_1t_2)$, предмет $c$ «находится» в различных местах.

Покой определяется так:

(Д2) предмет $c$ п о к о и т с я в момент $t$ тогда и только тогда, когда существует временной отрезок $[t_1t_2]$, такой, что точка $t$ принадлежит отрезку $[t_1t_2]$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, и в любые два момента времени $t_i$, $t_j$, принадлежащие отрезку $[t_1 t_2]$, предмет $c$ «находится» в одном и том же месте.

Иначе говоря, предмет движется (или покоится) в момент времени тогда и только тогда, когда он движется (соответственно покоится) в течение некоторого промежутка времени.

Из (Д1) и (Д2) следует, что всегда существуют первый и последний моменты покоя, но не существует первого и последнего моментов движения. Первое следует из того, что в (Д2) содержится условие $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а второе следует из того, что в (Д1) имеется условие $t_1 < t < t_2$. С позиций определений (Д1) и (Д2) Айдукевич критикует Зенона. Зенон, по его мнению, допускает подмену понятий, понимая термин «момент» то как точку, то как промежуток времени. А именно, когда Зенон говорит о том, что тело находится в момент времени в определенном месте пространства, он понимает момент как точку. Когда Зенон говорит, что в этот же момент тело покоится, то он понимает момент как промежуток времени, ибо относительно точки времени покой не определим.

Однако концепция Айдукевича имеет немало слабых сторон. Если Зенон действительно неправомерно отождествлял понятие «находится» с понятием «покоится», то Айдукевич также необоснованно отождествляет в определении (Д2) понятие «покоится в точке времени» с понятием «покоится в промежутке времени», особенно в случае понимания термина «находится» в смысле «проходит» или «оставляет». Еще более непонятным является отождествление, согласно определению (Д1), понятия «движется в точке времени» с понятием «движется в промежутке времени», особенно при понимании термина «находится» в смысле «пребывает». Хотя об определениях и не спорят, но немало трудностей представляет нахождение объектов, удовлетворяющих определениям, т. е. придание этим определениям реального смысла. Например, придать реальный смысл определениям Айдукевича, на наш взгляд, очень затруднительно, ибо реальных точек и моментов вообще не существует, а рассматривать их точно так же, как конечные величины, вряд ли позволительно.

Айдукевич фактически не разрешает этой трудности, а уходит от её разрешения. Действительно, мы не имеем возможности определять понятие «покоится в точке времени». Однако отождествление понятия «в точке времени» с понятием «в промежутке времени» не является разрешением трудности, ибо неизвестно, как подобное отождествление можно оправдать применительно к реальным объектам. Встает вопрос: если нельзя отождествлять понятие движения в промежуток времени с понятием движения в точке времени, как это делает Айдукевич, то можно ли определить движение в точке времени? На наш взгляд, вряд ли это возможно, если точку считать абсолютно бесструктурной. Поэтому при определении движения и покоя целесообразнее использовать понимание моментов времени и точек пространства как потенциально бесконечно малых величин. Подобные идеи были выдвинуты и с успехом применены для разрешения апории «Ахиллес» Е. К. Войшвилло [69].

Таким образом, нами рассмотрено несколько методов разрешения апорий Зенона, изложенных в современной зарубежной литературе. Логический и математический аспекты этих методов могут представлять интерес и быть полезными не только для разрешения трудностей отображения движения, основанных на диалектико-материалистической методологии, но и для других целей. Однако гносеологический аспект, связанный с отождествлением математических объектов с объектами реальными, явно не выдерживает критики с точки зрения диалектической теории познания. Без правильного решения гносеологической проблемы трудности отображения движения не могут быть правильно разрешены. Более того, без этого нельзя корректно поставить вопрос о том, что означает «разрешение трудностей отображения движения».

## § 2. Диалектический характер разрешения трудностей логического отображения движения

**Введение.** Диалектический характер как самого анализа трудностей отображения движения в мышлении, так и путей их разрешения прежде всего требует исследования, по возможности, всех компонент, явно или неявно присутствующих в этом отображении, в их взаимосвязи.

Анализ трудностей отображения движения, связанных даже с простейшим видом движения — кинетическим движением макрообъектов, показывает, что в подобном отображении можно выделить гносеологическую, формально-логическую и чисто математическую сторону. Отсюда следует необходимость формально-логического и математического анализа этих трудностей и установления диалектического единства между результатами каждого вида анализа.

За последние годы в нашей литературе появились работы, в которых проводится плодотворный анализ проблемы отображения движения. К такого рода работам относятся, например, работы С. А. Яновской [54, 58], Е. К. Войшвилло [69], И. С. Нарского [70] и др.

Всесторонний учет различных сторон, выступающих в процессе отображения движения, является, пожалуй, наиболее характерной чертой, отличающей упомянутых ученых от зарубежных исследователей этой проблемы, зачастую сводящих всю сложную проблему отображения движения только к формально-логической или чисто математической ее стороне. При этом гносеологическая сторона вопроса либо совсем не затрагивается, либо решается примитивно и по существу неверно (см. § 1).

Надо отметить особую заслугу в комплексном исследовании проблемы отображения движения С. А. Яновской. Диалектико-материалистический подход к этой проблеме, основанный на новейших достижениях логики, семиотики и математики, позволил ей более глубоко понять причины указанных трудностей и сделать дальнейший шаг в разрешении трудностей данного рода. Прежде всего оказалось, что эти трудности не могут быть решенными в абсолютном смысле, но на каждой ступени познания могут быть разрешаемы в относительном смысле. С. А. Яновская весьма убедительно показала, что формально-логические противоречия, являющиеся основным поставщиком трудностей рассматриваемой проблемы, наступают тогда, когда на новой стадии развития теории не учитывается та смена огрублений, упрощений, идеализаций, на которых была основана предшествующая стадия ее развития, т. е. когда не учитывается, что существенными оказываются как раз те стороны теории, от которых ранее отвлекались.

Для отображения развивающегося объекта теория должна быть подвижной, что требует, по возможности, всестороннего и явного учета предпосылок, касающихся принятых ею конструктивизаций и идеализаций. Когда старая теория применяется к новым объектам, всегда возможны противоречия, которые зачастую не так-то просто устранить, но которые в принципе устранимы за счет новой идеализации и конструктивизации. Противоречия исключаются из теории за счет перемещения их за пределы теории и оставления тех допущений, которые выражают факторы, от которых теория может отвлекаться. Конструктивизация и идеализация позволяет лучше выявить интересующую нас сущность объекта.

Но если становится существенным то, что находится за пределами этой конструктивизации и идеализации, то нужна новая конструктивизация и идеализация, ибо старая ведет к противоречиям. Образно выражаясь, получается развитие процесса познания в виде спирали. Поэтому трудности отображения движения решаются только в относительном смысле, ибо новая конструктивизация и идеализация связаны с новыми трудностями, главным образом гносеологического порядка. И если в настоящее время можно говорить, что современная математика имеет средства для решения, например, апорий Зенона, то всегда надо иметь в виду, что при этом гносеологические трудности предполагаются решенными. А так как на самом деле они в абсолютном смысле никогда не решаются, то апории представляют собой в действительности диалектические трудности, проистекающие не из слабости математики и логики, а из неограниченности процесса познания движения, в том числе и наиболее простой его формы — механического движения макрообъектов.

Один из методов разрешения противоречия, встречающегося в теории, состоит в выведении противоречия за пределы теории. Перемещение одной стороны противоречия за пределы теории, оставление в теории нужным образом идеализированных допущений, отвлечение от несоответствия их действительному положению вещей оказываются оправданными, если эти отвлечения и идеализации могут быть в последующем «сняты». В связи с этим очень важно исследование путей введения и исключения абстракций в науке [82]. С философской точки зрения важно отметить, что такое исследование опирается на принцип конкретности истины и критерий практики. Безотносительно к конкретной задаче, т. е. в абсолютном смысле, согласно С. А. Яновской, вообще нельзя судить о том, можно или нельзя вводить либо исключать данную абстракцию.

Исходя из этого, С. А. Яновская дает аргументированную критику различных направлений в логическом и философском обосновании математики и логики, которые пытались разрешить трудности, возникающие в этих науках, абсолютизируя допустимость тех или иных математических абстракций. Более того, допущение осуществимости объектов даже заведомо неосуществимых не ведет к ненаучности теории, если имеются способы конечного, приближенного их истолкования (пусть не при всех условиях применимого без противоречий).

Без установления способов, позволяющих не только вводить абстрактные объекты, но и «исключать» их, никакая теория на практике не применима. Например, классическая и релятивистская механики при описании движения используют абстракции бесконечности, но при этом имеют способы исключения данных абстракций в практических приложениях.

В дальнейшем изложении мы будем использовать некоторые очерченные выше идеи С. А. Яновской.

Для определенности рассмотрим трудности отображения механического движения макрообъектов, что позволит нам более точно судить о вводимых огрублениях, упрощениях, омертвлениях и т. п., т. е. судить о том, какие идеализации приняты при изучении движения.

**Идеализации, принимаемые при отображении механического движения макрообъектов.** Явное указание принимаемых идеализаций при изучении некоторого объекта очень важно с той точки зрения, что при решении различных вопросов мы должны достаточно четко определить, какие задачи приняты нами за решенные, хотя действительное (практическое) их решение не осуществлено.

При изучении механического движения макрообъектов принимаются следующие более или менее важные идеализации (т. е. следующие задачи приняты за решенные).

1. Движущееся макротело рассматривается как движущаяся точка, т. е. от наличия у тела структуры и размеров в данном рассмотрении отвлекаются. Из этого следует, что в тех задачах, в которых наличием структуры и размерами тела нельзя пренебречь (например, в квантовой механике), эта идеализация не применима. Применение данной идеализации означает отождествление нульмерной точки с макрообъектом.

2. Сущностью движения в данном рассмотрении выступают время и пространство. Иначе говоря, движется макротело или не движется, следует судить только по тому,

изменяет оно или нет свои пространственные координаты в зависимости от изменения времени. От всех других изменений тела и причин этого изменения в данном рассмотрении отвлекаются; движение выступает только как функция времени, ставящая в соответствие временным координатам координаты пространственные.

3. Пространство и время рассматриваются как объекты, имеющие точечную структуру, т. е. трактуются в виде бесконечных множеств точек мощности континуума. Это также очень сильная идеализация, при которой происходит отвлечение от действительной структуры этих объектов.

4. Предполагается, что движение тела во времени и в пространстве имеет траекторию (подобное допущение при рассмотрении движения микрообъектов опять-таки не приемлемо). Это значит, что предполагается решенной задача фиксирования в каждый данный момент времени (в точке времени) положения движущейся точки тела в точке пространства. Мы снова имеем здесь дело с предельно идеализированной практической возможностью. Однако с введенной абстракцией можно связать способ практического ее исключения, например, путем приблизительного фиксирования положения реальных тел в определенные промежутки времени в некоторых местах пространства.

Учитывая эти идеализации, можно давать различные определения понятиям движения и покоя, понимая эти термины соответственно как механические движение и покой макрообъектов. В случае содержательной (не формальной) теории под определением (или логическим определением) понятия подразумевается разъяснение его смысла через исходные понятия, смысл которых принимается за известный. На самом деле смысл исходных в данной теории понятий разъясняется либо путем примеров, либо в терминах более простой теории, либо в терминах обычного разговорного языка.

**Об определении понятий движения и покоя.** Чтобы определить движение и покой, очевидно, следует выбрать какие-то исходные понятия. Это необходимо по условию выполнения самой операции определения. Тогда движение и покой будут определяемыми в данной теории понятиями. Смысл исходных понятий надо разъяснять в терминах теорий, предшествующих нашей теории, а потому считающихся более простыми. При этом надо опираться на те идеализации, которые являются предпосылками нашей теории. Например, если определяемыми понятиями являются понятия движения и покоя, а исходными (т. е. не определяемыми в нашей теории) являются понятия «находится» и «не находится», то смысл последних понятий можно разъяснять, используя математические понятия бесконечности, точки, а также предположение об умении зафиксировать движущуюся точку в точке пространства в некоторый момент времени и т. п. Смысл последних понятий и операций, согласно принятым в нашей теории идеализациям, следует предполагать ясным (на смысле одного из них — термина «бесконечность» — мы останавливались специально в главе первой).

Разъясним смысл понятий «находится» и «не находится».

Понятие, выражающее свойство точки тела $p$, находится в точке пространства $l$ в момент времени $t$, обозначим постоянным предикатом $H(p, t, l)$, который и будем понимать как умение зафиксировать точку тела $p$ в момент $t$ в точке пространства $l$. Такое «умение» допустимо, согласно нашему предположению 4 (подобная задача просто принята за решенную).

Для осуществления (в смысле абсолютной осуществимости) этой операции, согласно предположениям 1—3, имеются все необходимые условия (предполагается, что пространство и время состоят из соответствующего рода точек, а тело представлено в виде точки).

Понятие, выражающее свойство точки тела $p$ в момент $t$ не находиться в точке $l$, обозначим постоянным предикатом $\neg H(p, t, l)$, который будем понимать как умение зафиксировать точку тела $p$ в момент $t$ вне точки пространства $l$.

Так как смысл понятий «находится» и «не находится» существенно опирается на предположение об осуществимости операции фиксирования точки тела именно в точке пространства (а не в какой-нибудь ее части, которой, кстати говоря, при нашей идеализации точка не имеет) и именно в бесструктурный (не имеющий частей) момент времени, то об определении «движения» и «покоя» применительно к точке $l$ в момент $t$ не может быть и речи.

Поэтому определим понятия движения и покоя относительно отрезка пространства $[l_i, l_j]$ и интервала времени $[t_k, t_r]$.

Понятие «движение» обозначим предикатом Д $(p, [t_k, t_r], [l_i, l_j])$, смысл которого определим следующим образом:

$$Д(p, [t_k, t_r], [l_i, l_j]) \rightleftharpoons Н(p, t_n, l_m) \,\&\, \neg Н(p, t_q, l_m),$$
$$\text{где } t_n, t_q \in [t_k, t_r],\ t_n \neq t_q,\ l_m \in [l_i, l_j].$$

Понятие «покой» (отсутствие движения) обозначим предикатом П $(p, [t_k, t_r], [l_i, l_j])$ и определим его значение так:

$$П(p, [t_k, t_r], [l_i, l_j]) \rightleftharpoons Н(p, t_n, l_m) \,\&\, Н(p, t_q, l_m)$$

при тех же условиях, что и в предыдущем определении.

Приведенные здесь определения движения и покоя, конечно, представляют собой идеализированные абстракции, которые «исключаются» (или, как предлагает говорить А. А. Марков, «восполняются») в практических приложениях.

Если же в этих определениях свести отрезки к моментам времени, то определение движения будет противоречивым, что показывает невозможность определить движение в точке с помощью принятых нами идеализаций.

Действительно, при $t_k = t_r$ будем иметь равенства $t_n = t_k = t_r = t_q$ и тогда

$$Д(p, t_k, [l_i, l_j]) \equiv Н(p, t_k, l_m) \,\&\, \neg Н(p, t_k, l_m).$$

Нетрудно проверить, что при $t_k = t_r$ П $(p, t_k, [l_i, l_j]) \equiv$ $\equiv Н(p, t_k, l_m)$, т. е. что наше определение покоя не дает возможности отделить определяемое понятие от определяющего понятия, если это определение относится к моменту времени, а поэтому (во избежание порочного круга) подобное определение не может быть применено относительно момента времени.

Тем не менее непротиворечивые определения движения и покоя применительно к точке существуют, хотя «точка» в подобных случаях понимается не так, как это имеет место в нашем рассмотрении. (Примером может служить определение из [69].) Мы рассматривали точку с позиций абстракции актуальной бесконечности, но понятие точки можно рассматривать (как, например, в [69]) с позиции абстракции потенциальной осуществимости, что в корне меняет дело.

Трудности в отображении движения имеют различные причины. Так, в выше приведенном определении движения (и покоя) существенно участвует абстракция актуальной бесконечности, которая более двух тысяч лет считалась повинной во всякого рода парадоксах. Поэтому в проблеме отображения движения анализ абстракции актуальной бесконечности занимает весьма важное место (этому вопросу посвящен § 2 главы первой). Не меньшие трудности возникают и при определении движения с использованием понятия потенциальной бесконечности. Разрешение этих трудностей связано с анализом абстракций бесконечности.

Но имеются трудности, разрешение которых связано с семантикой и логикой.

**Логический анализ трудностей отображения движения.** В приведенном нами определении движения одновременно употреблены понятия «находится» и «не находится».

Если проанализировать их смысл, то может показаться, что наше определение движения самопротиворечиво.

Однако о самопротиворечивости надо судить не по грамматической форме терминов и предложений, а по их логической форме, для чего необходим не только синтаксический, но и семантический анализ терминов и предложений.

Пусть, например, имеется понятие о движении, согласно которому тело движется тогда и только тогда, когда оно в один и тот же момент времени и находится и не находится в одном и том же месте пространства. Чтобы судить о том, самопротиворечиво или нет данное определение, надо уточнить, что означают термины «тело», «место пространства», «момент времени», «находится», «не находится», что значит «один и тот же момент времени», «одно и то же место в пространстве» и т. д.

Только на основе подобного семантического анализа можно судить о «логической форме» терминов и предложений. Например, приведенная нами семантика терминов «находится» и «не находится» говорит, что утверждение о том, что тело находится и в то же время не находится в одном и том же месте, не является логически противоречивым, ибо «в одно и то же время» у нас означает один и «тот же отрезок времени», «находиться» означает быть зафиксированным в момент некоторого отрезка времени в некоторой точке отрезка пространства, «не находиться» означает не быть зафиксированным в точке данного отрезка пространства в момент данного отрезка времени и т. д.

При другом понимании терминов анализируемого предложения в одних случаях может, в других случаях не может возникнуть противоречие.

Семантический анализ апорий Зенона, например, показывает, что трудности отображения движения, выражаемые этими апориями, вовсе не носят формально-логического характера.

В самом деле, предложения, составляющие, по видимости, логические противоречия в формулировке этих апорий, сформулированы на разных языках: одно из них — на языке некоторой математической модели, а другое — на языке эмпирической модели. Например, описание самого процесса движения точки тела, данное в апориях «Дихотомия» и «Ахиллес», с одной стороны, исходит из предположения о бесконечной делимости пространства и времени. Для осуществления такой делимости необходимо, чтобы отрезки пространства были абсолютно точны, *определялись бы нульмерными* точками, иначе говорить о процессе бесконечного деления конечного отрезка просто не имеет смысла. Но в природе нет ни нульмерных точек, ни абсолютно точных отрезков. Значит, описание движения тела в виде бесконечной геометрической прогрессии есть абстрактная математическая модель реального движения тела. Относительно этой модели можно по-разному определять, что следует считать «достижением движущейся точкой конечной точки пути». При одном определении такое «достижение» возможно, при другом — нет.

Например, апорию «Ахиллес» можно сформулировать на языке теорий точечных множеств так, что «Ахиллес» догонит черепаху. Для этого термины «Ахиллес» и «черепаха» будем понимать как точки, не имеющие измерений. Расстояние между Ахиллесом и черепахой и пути их движения будем понимать как отрезки, т. е. как одномерные линейные точечные континуумы. Пусть отрезок, равный исходному расстоянию между точками, будет равен 1, а скорости первой и второй движущихся точек пусть будут соответственно равны 1 и $^1/_2$. Тогда движение Ахиллеса можно выразить в виде бесконечного множества отрезков $\{1, 1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n, \ldots\}$, а движение черепахи — множеством $\{1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^{n+1}, \ldots\}$. Понятие «догонит» пусть будет означать, что элементы обоих множеств приведены во взаимно однозначное соответствие.

Так как с точки зрения теории множеств указанные множества можно привести во взаимно однозначное соответствие, то построенная нами «модель» движения Ахиллеса и черепахи будет давать положительный ответ на вопрос, догонит ли Ахиллес черепаху, т. е. мы получим такой же утвердительный ответ, какой нам будет давать эмпирическая «модель» движения быстрого Ахиллеса и медленной черепахи при соблюдении соответствующих условий.

Но можно построить и иные математические «модели» движения Ахиллеса и черепахи, которые будут нам давать на поставленный выше вопрос отрицательный ответ, расходящийся с тем ответом, который дает эмпирическая «модель».

С другой стороны, в формулировке рассматриваемой апории предложение, утверждающее, что тело должно пройти конечную дистанцию за конечное время, сформулировано на эмпирическом языке (представляет эмпирическую модель).

В определенном смысле критерии истинности математических и эмпирических предложений совершенно различны, ибо истинность последних проверяема путем непосредственных наблюдений, что в принципе невозможно для первых.

Два предложения могут быть семантически противоречивы лишь в том случае, если их истинностное значение устанавливается с точки зрения одного критерия истинности. В противном случае они просто не сравнимы по своему истинностному значению.

Нельзя, например, говорить о том, что аксиома о параллельных в интерпретированной геометрии истинна, а ее отрицание ложно, если у этих предложений разные интерпретации (разная семантика). Как известно, оба утверждения истинны, но в разных областях (т. е. при разных интерпретациях): первое истинно в евклидовом пространстве, второе — в пространстве Лобачевского. Предложения с разными критериями истинности относятся к разным теориям.

Поэтому утверждение о недостижимости движущейся точкой конечной точки отрезка пути, в котором речь идет об отношениях абстрактных и идеализированных объектов (истинное в абстрактной теории), формально-логически не противоречит эмпирически истинному утверждению о достижении реальным телом последнего этапа пути при движении на конечной дистанции, в котором речь идет об отношении реальных физических объектов.

Если пойти по пути опровержения того, что происходит в сфере абстрактных объектов, на основании того, что происходит в сфере чувственно данных физических объектов, то надо отрицать возможность мыслить одномерный отрезок состоящим из нульмерных точек на том основании, что в физическом мире из «ничего» не возникает «нечто». Абсурдность последнего утверждения очевидна.

Противоречие имело бы место лишь в том случае, если бы абстрактная математическая модель движения полностью соответствовала чувственно данному нам движению.

Но так как этого нет, то нет формально-логического противоречия между тем, что утверждается о математической модели, с одной стороны, и об эмпирической модели — с другой.

На наш взгляд, строго доказать, что апории Зенона выражают формально-логические противоречия, невозможно. Однако независимо от этого они поднимают важную методологическую проблему допустимости использования в науке положений, отрицающих друг друга.

Древние греки стихийно эту проблему решали положительно. Они, например, считали возможным использовать и допущение бесконечной делимости (геометрия Евклида) и признание неделимых (геометрия Демокрита), но только в разных теориях (в частности, в разных моделях пространства). И при этом никаких формально-логических противоречий не возникало ни в одной из этих теорий. В настоящее время решение упомянутой методологической проблемы основано на гносеологическом, семиотическом и логическом анализе языка науки и тоже является положительным. Например, в современной физике одни теории (например, классическая и релятивистская механики) допускают бесконечную делимость, а другие допускают «неделимые» (например, квантовая механика). Однако и тут формально-логических противоречий в физике не возникает именно потому, что эти допущения принимаются не одной, а разными теориями.

Возникает вопрос, почему науки (в том числе физика) допускают, хотя и в разных теориях, отрицающие друг друга положения. На этот вопрос дает ответ гносеологический анализ науки. В общем виде он состоит в том, что при описании одного и того же объекта приходится строить теории, одна из которых отвлекается по необходимости от того, от чего не отвлекается другая теория, и наоборот.

**Гносеологический анализ трудностей отображения движения.** Гносеология, являясь наукой о познании и в первую очередь о критериях и истинности познания, позволяет правильно понять природу синтетического знания о движении. Диалектико-материалистическая гносеология хотя и не дает возможности раз навсегда разрешить трудность отображения движения, но дает возможность правильно разрешать их в каждом конкретном случае.

Движение может описываться (т. е. отображаться в мышлении с помощью некоторого языка) самым различным образом. Но во всех случаях это требует огрубления, разделения, упрощения, ибо понятие отражает явление не во всем его многообразии, а лишь со стороны общего, устойчивого, что есть в данном явлении.

«Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения,— говорит Ленин,— не прервав непрерывного, не упростив, не огрубив, не разделив, не омертвив живого» ([3], стр. 268). Причем одно огрубление сменяет другое. В этом состоит суть диалектики познания изменяющихся объектов.

При описании движения с помощью математических абстракций процесс огрубления, упрощения, разделения заходит особенно далеко, ибо употребляются такие абстракции, как математические абстракции точки и момента, не имеющие никаких измерений, абстракции потенциальной и актуальной бесконечности и т. п.

Более того, свойства движения могут описываться с помощью формальных теорий. В предыдущем параграфе примером такой теории являлось описание свойства непрерывности при помощи аксиоматики Ширанши.

Формальное описание может служить для описания объектов любой области, в которой аксиомы находят свою интерпретацию. Поэтому формальное описание объекта не отображает индивидуальных особенностей объекта, отображая лишь то общее, что есть у данного объекта с другими объектами.

Таким образом, особенности логического отображения движения с помощью формализованных математических теорий состоят в том, что с необходимостью приходится отвлекаться от специфики реального движения.

Возьмем для иллюстрации описание основного свойства пространства, времени и движения — свойства непрерывности. Мы видели, что это свойство можно описать по-разному. Например, это можно сделать на основе использования абстракции актуальной бесконечности, как это делали Рассел и Грюнбаум, или на основе абстракции потенциальной бесконечности, что имеет место у Ширанши. Все эти описания могут быть отнесены не только к пространству и времени, но и к числовым множествам. Об этом свидетельствуют те интерпретации в области чисел, которые могут иметь аксиомы, описывающие непрерывность. Описание непрерывности движения как функции времени по существу является аналогичными описанию непрерывности функции вообще, определенной на множестве действительных чисел.

Так как понятия непрерывного множества, непрерывной функции разработаны математикой, то и описание свойства непрерывности или других свойств пространства, времени и движения называют математическим. Такое название можно отнести не только к понятию непрерывности по Кантору, но и к понятию непрерывности по Ширанши, ибо описания непрерывности и в первом, и во втором случае получают арифметическое истолкование. Если же перед нами стоит задача отобразить движение как некоторый специфический физический процесс, а не только то общее, что есть у движения с какими-либо другими объектами, понять сущность реального процесса движения, то мы должны рассматривать также и его специфику. Одно формальное описание не может дать такого отображения по принципиальным соображениям.

Поэтому для выявления сущности движения мы привлекаем данные различных абстрактных теорий и данные эмпирического опыта. При этом ввиду односторонности каждой из теорий может случиться, что одна теория должна отвлекаться и с необходимостью считать несущественным как раз то, что для другой теории существенно и от чего она не может отвлечься. Для отображения движения важны не только формальные теории, но и данные чувственного опыта (эмпирические модели движения).

Спрашивается, как осуществить синтез формального и эмпирического, какова должна быть сущность синтетического знания? Понимание этого синтеза всегда представляло большие трудности в решении проблемы непротиворечивого отображения движения.

Нередко казалось, что формальное описание движения не совместимо с описанием, полученным на основе чувственных данных, и что поэтому какое-то из них надо считать неверным По этому поводу М. Блэк говорил, что данная трудность представляет «самый большой парадокс» [48].

При диалектическом подходе к сущности синтетического знания о движении подобных «парадоксов» не возникает. Свойства одного и того же объекта могут описываться, во-первых, различными формальными теориями, а во-вторых, всегда существует и неформализованное знание об этом объекте. Общее же знание о свойствах данного объекта (синтетическое знание) не предполагает объединения даже формальных теорий в одну теорию, ибо не исключено, что полученная таким образом теория будет противоречивой. Тем более не предполагается формализация всего неформализованного знания, ибо до конца провести такую формализацию все равно невозможно. Синтетическое знание должно быть диалектическим единством формальных и содержательных теорий, отображающих свойства данного объекта, например движения. Если же синтетическое знание мыслить как простое объединение формальных теорий, то возможны логические парадоксы. Действительно, если построить из двух логических непротиворечивых описаний одно, например, путем объединения систем аксиом того и другого описания в одну систему, то мы можем получить логически противоречивую систему, и это не трудно показать на примере.

Пусть мы хотим получить более разностороннее представление (синтетическое знание) о непрерывности движения и для этого объединим конъюнктивно аксиомы всех теорий, которые описывают непрерывность пространства и времени. Тогда описание непрерывности пространства, согласно концепции Грюнбаума, будет нам говорить относительно любых трех точек $A$, $B$, $C$, что если мы отождествляем (или не различаем) точки $A$ и $B$, а также точки $B$ и $C$, то не различаем и точку $A$ от точки $C$ на любом *m-м* уровне. Это предположение символически можно записать так:

$$\forall A \forall B \forall C (A \underset{m}{\sim} B \& B \underset{m}{\sim} C \supset A \underset{m}{\sim} C).$$

Однако описание непрерывности пространства, данное аксиомами Ширанши, говорит, что

$$\exists A \exists B \exists C (A \underset{n}{\sim} B \& B \underset{n}{\sim} C \& \neg (A \underset{n}{\sim} C)).$$

Поэтому на том уровне неразличимости, на котором выполняется аксиома Ширанши, мы получим противоречие. Пусть это будет *i-й* уровень неразличимости, тогда из

$$\forall A \forall B \forall C (A \underset{i}{\sim} B \& B \underset{i}{\sim} C \supset A \underset{i}{\sim} C)$$

следует

$$\neg (\exists A \exists B \exists C \neg (A \underset{i}{\sim} B \& B \underset{i}{\sim} C \supset A \underset{i}{\sim} C)),$$

откуда

$$\neg (\exists A \exists B \exists C (A \underset{i}{\sim} B \& B \underset{i}{\sim} C \& \neg (A \underset{i}{\sim} C))),$$

т. е. мы получим предложение, являющееся отрицанием аксиомы Ширанши *i-го уровня*

$$\exists A \exists B \exists C (A \underset{i}{\sim} B \& B \underset{i}{\sim} C \& \neg (A \underset{i}{\sim} C)).$$

Причина противоречия заключается в том, что первая теория рассматривает тождество с точки зрения «абсолютной» осуществимости, предполагая завершенным процесс различения, а другая теория рассматривает тождество с точки зрения потенциальной осуществимости, предполагая, что на каждом уровне отождествление производится с какой-то точностью и с изменением уровня тождество может смениться различием.

*Аналогично предложения, сформулированные на основе* чувственных представлений о данном объекте (т. е. эмпирическая модель), могут противоречить предложениям некоторой интерпретированной формальной теории (т. е. абстрактной модели).

Итак, синтетическое знание об объекте, в том числе и о движении, не может в любом случае быть простым конъюнктивным объединением предложений различных теорий. Каждая из теорий дает истинное знание, но эта истинность — не абсолютная, а относительная, и критерии истинности этих теорий различны, так как они рассматривают объект при различных принятых предпосылках. От этого не следует абстрагироваться. Абстрагирование от данного диалектического положения как раз и приводит к тому, что два высказывания, принадлежащие к разным теориям, сами по себе являются истинными, а их конъюнкция приводит к «логическому противоречию». Именно в этом видит Уиздом [51] наиболее странную особенность трудностей отображения движения.

Поэтому понимание синтеза в данном случае должно производиться с диалектических, а не формально-логических позиций.

Зачастую парадоксы движения происходят от неверного понимания синтетического знания о движении. При всем этом логическая непротиворечивость конкретной теории остается непременным условием отображения движения. Можно показать, что описания движения, кажущиеся логически противоречивыми, на деле таковыми не являются.

Между прочим, иногда совершенно необоснованно выражают логически противоречащими друг другу предложениями суждения о наличии у объекта «диаметрально противоположных» (диалектически противоречивых) свойств, которые хотя и «отрицают» друг друга в каком-либо отношении, но зато в другом отношении друг друга с необходимостью «предполагают»: такие предложения оба вместе только и воссоздают в какой-то степени полную картину (например, картину движения).

Между этими двумя сторонами отображения движения нет логического противоречия, но кажется, что оно существует, ибо предложения, относящиеся к эмпирическому знанию, мы склонны читать на языке самого формального описания. Иначе говоря, возникает тенденция оперировать с точками, моментами и т. п. понятиями так же, как с чувственно воспринимаемыми объектами, что заведомо обречено на неудачу. Понимание этой по существу гносеологической трудности позволяет вскрыть причины парадоксов движения. Так, если проанализировать парадоксы Зенона, то окажется, что в каждом из них одно из «противоречащих» друг другу предложений принадлежит формальной математической теории, а другое — эмпирической теории. Например, в парадоксе «Дихотомия» процесс движения точки тела описывается с помощью математических абстракций. Сама эта точка и ее положения во времени и пространстве принимаются за математические точки, закон движения описывается бесконечной прогрессией. В то же время результат движения не основывается на математическом описании, а непосредственно на эмпирических данных. Получается, что с точки зрения одного описания частица не достигнет конечного пункта, а с точки зрения другого — достигнет. На самом деле речь идет в одном и другом предложении о совершенно разных объектах, предложения принадлежат к разным теориям, поэтому о логическом противоречии говорить здесь неуместно. Если же результат движения правильно выразить в терминах теории, описывающей сам процесс движения, то противоречий тоже не возникнет. Но иногда можно ограничиться формальным описанием только одной из этих сторон движения, удовлетворившись эмпирическим знанием о его другой стороне. Тогда трудность состоит в практическом описании в рамках одной теории как самого процесса движения, так и его результата.

Эмпирическое знание позволяет нам восполнить то, что теряется при формальном математическом описании. Но, с другой стороны, и эмпирическое знание не восполняет порой даже существенных сторон объекта, которые отображает формальное описание. Когда мы точки и моменты интерпретируем как некоторые конечные промежутки времени и расстояния, то проходимая частицей дистанция расчленяется на конечное число элементов. Поэтому невозможно уже описать непрерывность с помощью бесконечности, а ведь именно из-за этого мы вынуждены были строить наше математическое описание движения. Только диалектическое единство формального описания и эмпирического знания позволяет воссоздать более или менее полное представление о свойствах отображаемого объекта, в частности о свойствах движения. Вовсе не требуется отбрасывать одну из сторон для разрешения возникающего логического противоречия, как об этом говорят Блэк, Вайсман, Ширайши, Грюнбаум и другие авторы. Эти стороны находятся друг с другом не в отношении логического противоречия, а в отношении диалектического единства. Эмпирическое описание дополняет те стороны, от которых отвлекается формальное описание, а формальное описание в свою очередь отображает такие стороны движения, которые не доступны эмпирическому знанию.

Мы уже говорили о том, что если формальная теория имеет интерпретацию в области некоторых объектов, а тем самым является описанием определенных свойств данных объектов, то это еще вовсе не означает, что она полностью отражает все свойства объекта. Остаются неописанными как раз те свойства, которые не охватываются данной интерпретацией и именно потому не совместимы с ней. Значит, относительно каждой формальной системы объект обладает двумя родами свойств и отношений: такими, которые могут служить интерпретацией данной системы, и такими, которые не могут служить такой интерпретацией. Последние не могут служить для целей интерпретации именно потому, что не совместимы со свойствами самой формальной системы. В противном случае они могли бы быть объектами интерпретации этой системы. Сам по себе объект обладает обоими видами свойств — описываемыми и неописываемыми данной формальной системой.

Расширяя формальную систему, можно все более полно описывать свойства объекта, например движения, но полностью описать их невозможно, поэтому всегда остается неформализованное знание о свойствах объекта, которое следует учитывать для полноты знания об объекте в целом. Относительно самого объекта высказывания о присущности ему свойств и отношений обоих видов, как формально описываемых, так и формально не описываемых, являются истинными.

В этом смысле мы имеем единство диалектически противоположных (относительно данной формальной системы) свойств и отношений. Действительно, в объекте совмещены свойства, противоречивые в вышеуказанном смысле, т. е. могущие и немогущие быть описанными данной формальной системой. Единство таких противоположных свойств в одном объекте является диалектически противоречивым единством. Среди свойств, не описываемых данной формальной системой, могут быть свойства, описываемые другой формальной системой, даже не обязательно совместной с первой. Но важно то, что останутся свойства не описываемые, т. е. не могущие быть объектом интерпретации, ни одной из формальных систем. Однако эти свойства могут быть познаваемы нами с помощью чувственных наблюдений или с помощью каких-либо содержательных рассуждений. Поэтому суждения о таких свойствах будут истинными, но не будут предложениями, получающимися в результате интерпретации формальной теории.

Правда, формальную теорию можно всегда расширить. Однако при любом конечном расширении, которое только и доступно человеку, всегда будут оставаться свойства, не описываемые этой теорией. Поэтому диалектическое противоречие между способностью формального описания свойства объекта и реальными свойствами этого объекта всегда будет оставаться неполностью разрешенным, хотя всегда будет возможность сколь угодно далеко продвинуться в разрешении этого противоречия относительно выделенного круга свойств и отношений объекта.

Из самой сути диалектических противоречий отображения объектов следует, что ни одна формальная система не может претендовать на полное описание даже одного какого-нибудь свойства объекта, ибо проявления этого свойства у реальных объектов безграничны.

Мы рассматривали это на примере такого свойства движения, как непрерывность. Формальное описание непрерывности по Кантору дает нам представления о некоторых свойствах непрерывности, но только не о тех, которые непосредственно даны с помощью чувственных данных. Формальное описание непрерывности по Ширанши лучше отражает как раз последний аспект непрерывности, но, как мы показали, и оно далеко не полно. Ни одна из этих теорий не в состоянии полностью отобразить непрерывности движения. Но так как то и другое формальные описания интерпретируемы при определенных ограничениях и допущениях, то они описывают все же (с некоторой приблизительностью) свойства непрерывности реального движения. Поэтому нельзя сказать, что одна из данных теорий абсолютно верна, а другая абсолютно ложна. Этот вопрос следует решать с точки зрения относительности критерия истины. Если не учитывать этого критерия, то диалектическое противоречие можно представить как формально-логическое противоречие.

Действительно, высказывания об интерпретируемых и неинтерпретируемых свойствах и отношениях в этом случае следует пытаться втиснуть в рамки одной теории, что не может не привести к ее противоречивости. Данное обстоятельство было нами показано на примере формулирования предложения, совмещающего разные смыслы неразличимости по Ширанши (см. §1 главы второй).

Чтобы разрешить встречающиеся при отображении движения логические противоречия, в первую очередь надо строго различать те свойства, которые могут быть описаны данной формальной системой, от тех свойств, которые не могут быть ею описаны. Само противоречие свидетельствует о наличии таких противоположных свойств. Если рамки формальной системы не позволяют отобразить сразу обоих указанных свойств, то отображение одного из них нужно вывести за пределы этой системы, и тем самым противоречие будет разрешено. Свойство, которое не может описать данная теория, может описывать другая формальная система. Но это не значит, что если две системы описывают свойства одного и того же объекта, то они совместимы. Между этими теориями есть единство, которое не препятствует невозможности рассмотрения этих теорий как одной теории.

Например, формальная система Шираиши не полностью описывает свойства непрерывности, понимаемой как неразличимость. Об этих не описываемых формально свойствах мы знаем на основе содержательных рассуждений, которые выше были нами приведены.

Но они не только не описываются системой Шираиши, но и не могут быть ею описаны, что было уже показано в настоящем параграфе.

Однако не трудно заметить, что как раз эти свойства описываются другой формальной теорией, а именно обычной аксиоматикой арифметики действительных чисел, содержащей правило транзитивности.

Как мы видели в § 1 главы второй, благодаря аксиоме (Ш7) это описание Шираиши явно отвлекается от того, что если произвольные точки $A$, $B$ по-разному относятся к точке $C$, то они как-то различаются между собой, т. е. имеет место следующее предложение: если $B \tilde{_n} C$, но $\neg(A \tilde{_n} C)$, то $\neg(A \tilde{_n} B)$. Это предложение выражает иной смысл неразличимости, чем неразличимость, описанная аксиомами Шираиши. Присоединение описания этого смысла неразличимости к аксиомам Шираиши приводит к противоречию, что было нами показано.

Этот смысл неразличимости описывается как транзитивное отношение, так как $\forall A \forall B \forall C\, (B \tilde{_n} C \,\&\, \neg (A \tilde{_n} C) \supset \supset \neg (A \tilde{_n} B)$ экв. $\forall A \forall B \forall C\, (A \tilde{_n} B \& B \tilde{_n} C \supset A \tilde{_n} C)$.

Иногда бывает важно выразить формально не только сам процесс движения, но и его результат. Тогда прибегают к абстракции актуальной бесконечности, давая математическое описание результату движения. Подобное описание состоит в рассмотрении движения как бесконечного множества актов движения или бесконечного множества пространственно-временных событий. Это дает возможность графически изобразить движение частицы в виде отрезка, содержащего бесконечное множество точек. Например, таким графическим изображением движения в виде временноподобной мировой линии пользуется теория относительности. Оно применяется также во многих областях науки и техники. Движение выражается как множество результатов каждого акта движения. Такое описание движения отвлекается от того, что результат движения, представленный в виде бесконечного множества дискретных актов, является результатом некоторого процесса, ибо мы не можем указать такого бесконечного процесса, который бы породил все бесконечное множество актов этого процесса.

Поэтому существо гносеологического аспекта проблемы разрешения трудностей отображения движения заключается в установлении диалектического единства формальных описаний движения с эмпирическими описаниями. При отображении движения эти эмпирические описания служат основой для образования суждений как раз о тех сторонах движения, от которых отвлекается математическое описание движения. Отображение движения, в таком случае, будет представлять синтез предложений, основанных на эмпирических данных (эмпирические суждения, или эмпирическая модель), и предложений некоторой формализованной теории (математическая модель). Синтез не приводит к логическому противоречию, так как он означает не конъюнктивное соединение эмпирических суждений с предложениями формальной теории, а установление диалектической связи между ними.

# ЛИТЕРАТУРА


1. Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1948.
2. Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. М., 1957.
3. В. И. Ленин. Философские тетради. М., 1936.
4. Б. В. Бирюков. Идеализация.— «Философская энциклопедия», М., 1962, т. 2.
5. Б. Больцано. Парадоксы бесконечного. Одесса, 1911.
6. Н. А. Шанин. О конструктивном понимании математических суждений.— «Труды математического ин-та АН СССР», т. 51.
7. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М., 1957.
8. А. А. Марков. Теория алгорифмов.— «Труды математического ин-та АН СССР», 1954, т. 42.
9. В. А. Успенский. Лекции о вычислимых функциях. М., 1960.
10. В. М. Глушков. Введение в кибернетику. Киев, 1964.
11. Сб. «Возможное и невозможное в кибернетике». М., 1964.
12. Г. Вейль. О философии математики. М., 1934.
13. Г. Кантор. Основы общего учения о многообразиях.— Сб. «Новые идеи в математике». Спб., 1914, № 6.
14. Г. Кантор. О различных точках зрения на актуально бесконечное (там же).
15. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М.: УРСС, 2004.
16. Р. Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа. Одесса, 1923.
17. Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. I, М., 1960.
18. D. van Dantzig Is $10^{10^{10}}$ a finite number? — «Dialectica», 1956, N 9.
19. А. С. Есенин-Вольпин. Анализ потенциальной осуществимости.— Сб. «Логические исследования». М., 1959.
20. А. С. Есенин-Вольпин. К обоснованию теории множеств.— Сб. «Применение логики в науке и технике». М., 1960.
21. В. А. Козмидиади. О множествах, разрешимых и перечислимых автоматами.— Сб. «Проблемы логики». М., 1963.
22. А. Тьюринг. Может ли машина мыслить. М., 1960.
23. А. Н. Колмогоров. Автоматы и жизнь.—«Техника молодежи», 1961, № 11.
24. А. А. Марков. Теория алгорифмов.— «Труды математического ин-та АН СССР», т. 38, 1951.
25. М. Я. Выгодский. Основы исчисления бесконечно малых. М., 1933.

26. П. С. Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. М.—Л., 1948.
27. А. О. Маковельский. Древнегреческие атомисты. Баку, 1946.
28. А. О. Маковельский. Досократики ч. 2. Казань, 1915.
29. Я. Л. Трайнин. Основания геометрии. М., 1961.
30. Э. Кольман. История математики в древности. М., 1961.
31. Д. Гильберт. Основания геометрии. М., 1948.
32. A. Grünbaum A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements. Philosophy of Science, 1952, v. 19, N 4.
33. Материалисты древней Греции. М., 1955.
34. С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов. М.—Л., 1935.
35. Аристотель. Физика. М., 1936.
36. Аристотель. Метафизика, М.—Л., 1934.
37. Д. Гильберт, В. Аккерман. Основы теоретической логики. М., 1947.
38. Г. Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века. М.—Л., 1946.
39. И. Гейберг. Естествознание и математика в классической древности. М.—Л., 1936.
40. А. П. Юшкевич. О методе исчерпывания древних математиков.— «Труды совещ. по истории естествозн., 24—26 декабря 1946 г.», М.—Л., 1946.
41. К. А. Рыбников. История математики, т. I, М., 1960.
42. А. Я. Хинчин. Краткий курс математического анализа. М., 1955.
43. Г. Кантор. К учению о трансфинитном. — Сб. «Новые идеи в математике», № 6, Спб. 1914.
44. W. Quine. New foundations for mathematical logic. «From a logical point of viefw». N. Y.— Evanston, 1953.
45. С. Т. Мелюхин. Проблемы конечного и бесконечного. М., 1958.
46. П. С. Новиков. Элементы математической логики. М., 1959.
47. А. Гейтинг. Обзор исследований по основаниям математики. М.—Л., 1936.
48. M. Black. Achilles and the tortoise. Analysis, 1951, v. 11, N 5.
49. R. Taylor. Mr. Black on temporal paradoxes. Analysis, 1951, v. 12, N 2.
50. A. Grünbaum. Messers. Black and Taylor on temporal paradoxes. Analysis, 1952, v. 12, N 6.
51. J. O. Wisdom. Achilles on a physical race cource. Analysis, 1952, v. 12, N 3.
52. B. Russell. Our knowledge of the external world, 1926.
53. B. Russell. The principles of mathematics, 1903.
54. С. А. Яновская. Апории Зенона Элейского и современная наука.— «Философская энциклопедия», М., 1962, т. 2, стр. 170—174.
55. L. E. Thomas. Achilles and the tortoise. Analysis, 1952, v. 12, N 4.
56. F. Weismann. Analytic — synthetic. Analysis, 1952, v. 13, № 4.
57. S. Shiraishi. The structure of the continuity of psychological experiences and the physical world. The Science of thought, 1954, N 1.
58. С. А. Яновская. Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апорий Зенона»? — Сб. «Проблемы логики». М., 1963.

59. A. N. Prior. Рецензия на [57]. The journal of Symoblic logic, 1955, v. 20, N 2.
60. Философские проблемы современного естествознания. М., 1967.
61. A. Grünbaum. Relativity and the Atomicity of Becoming. The Review of Metaphysics, 1950, v. 4, N 2.
62. А. С. Богомолов. Актуальная бесконечность. Л. — М., 1934.
63. B. E. Peach. Logical and practical contradictions. Analysis, 1953, v. 14, N 2.
64. S. M. Hinton and C. B. Martin. Achilles and the tortoise. Analysis, 1953, v. 14, N 3.
65. M. Capek. Relativity and the Status of Space. The Revie of Metaphysics, 1955, v. 9, N 2.
66. A. R. White. Achilles at the Shooting Gallery. Mind, 1963, v. LXXII, N 285.
67. S. Quan. The Solution of the Achilles Paradox.— The Review of Metaphysics, 1963, v. 3, N 63.
68. J. D. Nelson. Zeno's paradoxes on motion. The Review of Metaplysics 1963, v. XVI, N 3.
69. Е. К. Войшвилло. Еще раз о парадоксе движения, о диалектических и формальнологических противоречиях.— «Философские науки», 1964, № 4.
70. И. С. Нарский. К вопросу об отражении диалектики движения в понятиях.— Сб. «Формальная логика и методология науки». М., 1964.
71. Ю. А. Петров. Некоторые логические вопросы отображения движения. «Философские науки», 1964, № 2.
72. Ю. А. Петров. Три аспекта отображения движения в мышлении. «Вопросы философии», 1965, № 7.
73. S. Vatling. The sum of an infinite series. Analysis, 1952, v. 13, N 2.
74. A. Grünbaum. Modern Science and Refutation of the paradoxes of Zeno. The Scientific monthly, 1955, v. 81, B 5.
75. И. Г. Башмакова. Лекции по истории математики в древней Греции.— Сб. «Историко-математические исследования», вып. XI, М., 1958.
76. И. И. Жегалкин. Трансфинитные числа. М., 1907.
77. Ш. Фрейсинэ. Очерки по философии математики. М., 1902.
78. С. А. Яновская. О математических рукописях Маркса. — «Под знаменем марксизма», 1933, № 1.
79. Л. де Бройль. Революция в физике. М., 1963.
80. K. Ajdukiewicz. Über Fragen der Logik. Doeutsche Zeitschrift für Filosophie, 1956, N 3.
81. Р. Л. Гудстейн. Математическая логика. М., 1961.
82. Ю. А. Гастев. Математическая бесконечность.—«Философская энциклопедия», М., 1964, т. 3.

## СОДЕРЖАНИЕ

Ю. А. Петров

# ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ АБСТРАКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ И ОСУЩЕСТВИМОСТИ

Ответственный редактор:
доктор физико-математических наук,
профессор *С. А. Яновская*

Издание второе, исправленное

МОСКВА

УРСС

ББК 22.12 22.18 87.4

**Петров Юрий Александрович**

**Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости** / Отв. ред. С. А. Яновская. Предисл. Б. В. Бирюкова. Изд. 2-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 200 с.

ISBN 5-354-00975-8

В связи с развитием кибернетики, конструктивного направления в логике и математике, теории конечных автоматов, математической логики и теории моделирования значительно возросло значение правильного понимания проблем абстракций бесконечности и осуществимости.

В данной книге рассматриваются формально-логические и философские проблемы, связанные как с известными уже, так и с новыми абстракциями бесконечности и осуществимости. В частности, автор исследует вопрос о допустимости определенных формальнологических средств в теориях, использующих те или иные абстракции бесконечности и осуществимости, что представляет интерес для многих отраслей науки, а также для изучающих современную формальную логику.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 24.09.2004 г.
Формат 60×90/16. Тираж 320 экз. Печ. л. 12,5. Зак. № 2-1557/728.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

**ISBN 5-354-00975-8**



ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Internet: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46

1893 ID 24508

9 785354 009756

В связи с развитием кибернетики, конструктивного направления в логике и математике, теории конечных автоматов, математической логики и теории моделирования значительно возросло значение правильного понимания проблем абстракций бесконечности и осуществимости.

В данной книге рассматриваются формально-логические и философские проблемы, связанные как с известными уже, так и с новыми абстракциями бесконечности и осуществимости. В частности, автор рассматривает вопрос о допустимости определенных формально-логических средств в теориях, использующих те или иные абстракции бесконечности и осуществимости, что представляет интерес для многих отраслей науки, а также для изучающих современную формальную логику.




1893 ID 24508

9 785354 009756 >

ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

**E-mail: URSS@URSS.ru**

**Каталог изданий в Интернет: http://URSS.ru**